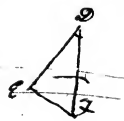
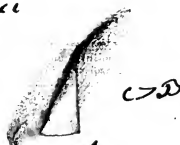
ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
DI
ADRIANO M. LE GENDRE

PER LA PRIMA VOLTA

TRADOTTI IN ITALIANO

Si quid novisti rectius istis,
Candidus imperti.

PISA
DALLA TIPOGRAFIA
DELLA SOCIETÀ LETT.
MDCCCII

L' EDITORE

Nel presentar tradotta in Italiano questa celebre Geometria, non v'è certamente bisogno di raccomandarne l'Autore, essendo ormai tanto famoso in Europa. In Francia è già terminata la seconda copiosissima edizione, e se ne sta imprimendo la terza. Riguardo al metodo tenuto nel tradurla, non posso dire altro se non che la fedeltà è stata spinta fino allo scrupolo. Riguardo poi allo spirito con cui sono stati scritti questi elementi, ed alle poche nozioni che si richiedono per afferrarne il senso, lasceremo che l'Autore stesso l'esponga nel breve squarcio che segue.

Si dà taccia agli elementi di geometria d'esser poco rigorosi: benchè diverse opere di tal sorte abbiano dei vantaggi particolari, e soddisfaccino assai bene al fine per cui sono state composte, non ve n'è alcuna che giunga a dimostrare tutte le proposizioni in un modo da appagare completamente lo spi-

rito. Ora gli autori suppongono delle cose che non sono contenute nelle definizioni; ora queste definizioni stesse son difettose; talvolta essi si contentano d' invocare la testimonianza degli occhj; altrove impiegano de' principj veri in se stessi, ma che sembrano avvolgere qualche negligenza di cui la mente non resta soddisfatta. In generale è difficilissimo il fare degli elementi rigorosi, non solo nella geometria, ma in tutte le scienze: le proposizioni più semplici sono quelle che recano il maggiore imbarazzo, e che si dimostrano col minor successo. Ma la difficoltà non è una ragione che debba impedire d' intraprendere opere sì utili. E siccome l' oggetto della geometria è semplice e di facile intelligenza, si può con fondamento sperare di fare de' buoni elementi di questa più che di ogni altra scienza. Per giungere a un tal fine non bisogna temere di comparir lunghi e minuti; purchè si ottenga la chiarezza, l' esattezza, e non si dica veruna cosa superflua, l' oggetto è soddisfatto; e le lungaggini, se ve ne sono, devono essere attribuite alla natura delle cose che non permet-

te una maggior brevità, se non a spese dell' esattezza che è la miglior dote della scienza. Io penso dunque che il metodo di cui si servivano gli antichi sia pur quello che più si accosta alla perfezione, e che meglio conviene alle dimostrazioni della geometria. I moderni l' hanno trovato troppo laborioso: glien' hanno sostituiti altri più semplici e più spediti: ma bisogna confessare che questi non sono sì rigorosi, nè sì soddisfacienti.

Suppongo che il lettore conosca la teorìa delle proporzioni, che si trova spiegata ne' trattati ordinarj d' aritmetica o d' algebra; suppongo pure che ei sia al fatto delle prime regole dell' algebra quali sono l' addizione e la sottrazione delle quantità, e le operazioni più semplici che si fanno sull' equazioni del primo grado. Gli antichi che non conoscevano l' algebra, vi supplivano col ragionamento e coll' uso delle proporzioni che maneggiavano con molta destrezza. Noi che abbiamo quest' istrumento di più avremmo torto non usandolo, se ne può risultare una facilità maggiore. Non ho dunque esitato a impiegare dei

segni e delle operazioni d' algebra allorchè l' ho giudicato necessario: ma ho procurato nel tempo stesso di non complicare con operazioni difficili ciò che deve esser semplice di sua natura; e tutto l' uso che ho fatto dell' algebra in questi elementi si riduce, come ho già detto ad alcune regole semplicissime, che si possono sapere quasi senza pensare che appartengano all' algebra.

Del rimanente mi sembra che se lo studio della geometria deve esser preceduto da qualche lezione d' algebra, non sarà neppure inutile di condurre di pari passo lo studio di queste due scienze, e di frammischiarle fra loro per quanto è possibile. Inoltrandosi nella geometria, si sente di più in più la necessità di combinare insieme un maggior numero di rapporti, e l' algebra può esser d' un gran soccorso per condurre ai resultati nella maniera più pronta e più facile... Stabilite le proposizioni degli elementi sopra basi solide, le loro diverse combinazioni, le applicazioni, e le conseguenze che se ne possono tirare divengono del dominio dell' algebra; e sarebbe cosa puerile l' impiegare sempre un metodo

laborioso, mentre glie se ne può sostituire un altro molto più semplice, e ugualmente sicuro.

Conosco che l'esecuzione di quest'opera è ancora molto imperfetta, e può esser migliorata per molti lati. Tocca ai geometri a pronunziare sulle innovazioni che troveranno in numero assai grande in questi elementi: attendo il loro giudizio, e invoco il soccorso de' loro lumi per essere a portata di dare a quest'opera i perfezionamenti di cui può esser suscettibile.

Nota. I numeri posti in margine indicano le proposizioni alle quali si manda per l'intelligenza del discorso. Un solo numero, per esempio 4 indica la quarta proposizione del libro presente; due numeri, per esempio 20, 3 indicano la ventesima proposizione del libro terzo.

INDICE

DEI LIBRI

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA

LIBRO PRIMO

I PRINCIPJ

DEFINIZIONI

1. La geometria è una scienza che ha per oggetto la misura dell'estensione.

L' estensione ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza e altezza.

2. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità d' una linea si chiamano *punti*: il punto non ha dunque alcuna estensione.

3. La *linea retta* è il più corto cammino da un punto a un altro.

4. Ogni linea che non è retta, nè composta di linee rette è una *linea curva*.

Così AB è una linea retta; ACDB una linea spezzata, o composta di linee rette, e AEB è una linea curva. Fig. 1.

5. *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza senza altezza o grossezza.

6. Il *piano* è una superficie nella quale prendendo due punti a piacere, e unendo questi due punti con una linea retta, questa linea stà tutta nella superficie.

7. Ogni superficie che non è piana, nè composta di superfici piane è una *superficie curva*.

8. *Solido*, o *corpo* è ciò che riúnisce le tre dimensioni dell' estensione.

Fig. 2. 9. Quando due linee rette AB, AC s' incontrano, la quantità più o meno grande di cui sono distanti l' una dall' altra si chiama *angolo*; il punto d' incontro o d' intersezione A è la *sommità* dell' angolo, le linee AB, AC ne sono i *lati*.

L' angolo s' indica talora colla sola lettera della sommità A, talora con tre lettere BAC o CAB, osservando di porre in mezzo la lettera della sommità.

Fig. 3. 10. Quando la linea retta AB incontra un altra linea CD, talmente che gli angoli adiacenti BAC, BAD, siano uguali fra loro, ognuno di questi angoli si chiama un *angolo retto*, e la linea AB vien detta *perpendicolare* sopra CD.

Fig. 4. 11. Ogni angolo BAC minore d' un angolo retto è un *angolo acuto*; ogni angolo maggiore DEF è un *angolo ottuso*.

Fig. 5. 12. Due linee si dicono *parallele*, quando essendo situate nel medesimo piano, non possono incontrarsi fra loro, benchè si prolunghino ambedue a qualunque distanza.

13. *Figura piana* è un piano terminato da ogni parte da linee.

Se le linee sono rette, lo spazio che esse racchiudono si chiama *figura rettilinea*, o *poligono*, e le linee stesse prese insieme formano il contorno o *perimetro* del poligono. Fig. 6

14. Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti, e si chiama *triangolo*; quello di quattro lati si chiama *quadrilatero*; quello di cinque, *pentagono*; quello di sei, *esagono*, ec.

15. Si chiama triangolo *equilatero* quello che ha i tre lati uguali; triangolo *isoscele* quello di cui due soli lati sono uguali; triangolo *scaleno* quello che ha i tre lati disuguali. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

16. Il triangolo *rettangolo* è quello che ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*. Così ABC è un triangolo rettangolo in A, e il lato BC è la di lui ipotenusa. Fig. 10.

17. Fra i quadrilateri si distingue:

Il *quadrato*, che ha i lati uguali, e gli angoli retti. Fig. 11.

Il *rettangolo* che ha gli angoli retti senz'avere i lati uguali. Fig. 12.

Il *parallelogrammo* che ha i lati opposti paralleli. Fig. 13.

Il *rombo*, i di cui lati sono uguali senza che gli angoli siano retti. Fig. 14.

Finalmente, il *trapezio* di cui due soli lati sono paralleli. Fig. 15.

18. Chiameremo poligono *equilatero* quello di cui tutti i lati sono uguali; poligono *equiangolo* quello di cui tutti gli angoli sono uguali.

19. Due poligoni sono *equilateri fra loro*, quando hanno i lati uguali respettivamente, e situati nel medesimo ordine, cioè, quando

indicando i lati successivi d'ogni poligono con *primo lato*, *secondo*, *terzo ec.*, il primo lato dell' uno è uguale al primo dell'altro, il secondo dell' uno al secondo dell' altro, il terzo al terzo, e così in seguito. Nella stessa maniera si concepisce cosa s' intende per due poligoni *equiangoli fra loro*.

In ambedue i casi i lati uguali o gli angoli uguali si chiamano lati o angoli *omologhi*.

N. B. Ne' quattro primi libri non si tratterà che delle figure piane, o fatte sopra una superficie piana.

Spiegazione de' termini, e de' segni.

Assioma è una proposizione evidente da per se stessa.

Teorema è una verità che diviene evidente per mezzo d'un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

Problema è una ricerca proposta che esige una *soluzione*.

Lemma è una verità impiegata sussidiariamente per la dimostrazione d'un teorema, o la soluzione d'un problema.

Il nome comune di *proposizione* si attribuisce indifferentemente ai teoremi, problemi e lemmi.

Corollario è la conseguenza che deriva da una o più proposizioni.

Scolio è un' osservazione sulle proposizioni precedenti che fa vedere il loro legame, la loro utilità o la loro estensione.

Il segno = è il segno dell' uguaglianza; così l' espressione $A=B$ significa che A è uguale a B.

Per esprimere che A è minore di B, si scrive $A<B$.

Per esprimere che A è maggiore di B, si scrive $A>B$.

Il segno $+$ si pronunzia *più*, e indica l'addizione.

Il segno — si pronunzia *meno*, e indica la sottrazione. Così $A+B$ rappresenta la somma delle quantità A e B; $A-B$ rappresenta la loro differenza, o ciò che resta togliendo B da A; così $A-B+C$, o $A+C-B$ significa che A e C devono essere aggiunti insieme, e che B dev'esser tolto dal totale.

Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A\times B$ rappresenta il prodotto d'A moltiplicato per B. In vece del segno $\times$ si adopera talora un punto; così $A.B$ è lo stesso che $A\times B$.

L'espressione $A\times(B+C-D)$ indica il prodotto di A per la quantità $B+C-D$. Se bisognasse moltiplicare $A+B$ per $A-B+C$, s'indicherebbe il prodotto così $(A+B)\times(A-B+C)$.

Un numero posto innanzi a una linea o a una quantità serve di moltiplicatore a questa linea o a questa quantità; così per esprimere che la linea AB è presa tre volte, si scrive $3AB$; per indicarne solamente la metà si scrive $\frac{1}{2}AB$.

Il quadrato della linea AB s'indica con $\overline{AB}^2$; il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Si spiegherà a suo luogo ciò che significa propriamente il quadrato, e il cubo d'una linea.

Il segno $\sqrt{}$ indica una radice da estrarsi; così $\sqrt{2}$ è la radice quadrata di 2; $\sqrt{A\times B}$

è la radice del prodotto $A \times B$, o la media proporzionale tra A e B.

ASSIOMI

1. Due quantità uguali a una terza sono uguali fra loro.

2. Se a quantità uguali si aggiungono quantità uguali, le somme saranno uguali.

3. Se da quantità uguali si tolgono quantità uguali, i resti saranno uguali.

4. Se due quantità contengono una terza lo stesso numero di volte, queste due quantità saranno uguali fra loro.

5. Se due quantità sono contenute in una terza il medesimo numero di volte, esse saranno uguali fra loro.

6. Il tutto è maggiore della sua parte.

7. Il tutto è uguale alla somma delle parti nelle quali è stato diviso.

8. Da un punto a un'altro non si può condurre che una sola linea retta.

9. Due grandezze, siano linee, superfici, o solidi, sono uguali, allorchè essendo situate l'una sull'altra, coincidono in tutta la loro estensione.

N. B. Avremmo potuto riportare molti altri assiomi. ma questo piccolo numero basta; l'ottavo principalmente serve di base a tutta l'opera.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Gli angoli retti sono tutti uguali fra loro.

Fig. 16. Sia la linea retta CD perpendicolare ad AB, e GH ad EF; dico che gli angoli ACD, EGH saranno uguali fra loro.

Prendete le quattro distanze uguali CA, CB, GE, GF, la distanza AB sarà uguale alla distanza EF, e si potrà situare la linea EF sopra AB, in maniera che il punto E cada in A, e il punto F in B. Queste due linee così situate coincideranno intieramente l' una con l'altra; poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile *; dunque il punto G mezzo di EF cadrà sul punto C mezzo d'AB. Essendo così il lato GE applicato sopra CA, dico che il lato GH cadrà sopra CD; poichè supponiamo, s'è possibile, che cada sopra una linea CK differente da CD; siccome, per supposizione *, l'angolo EGH=HGF, bisognerebbe che fosse ACK=KCB. Ma l'angolo ACK è maggiore di ACD, e l'angolo KCB è minore di BCD; d'altronde, per supposizione, ACD=BCD; dunque ACK è maggiore di KCB; dunque la linea GH non può cadere sopra una linea CK differente da CD; dunque essa cade sopra CD, e l'angolo EGH sopra ACD; dunque tutti gli angoli rètti sono uguali fra loro.

*Ass.8.

*Def.10

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Ogni linea retta CD *che ne incontra un altra* AB, *fà con questa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la di cui somma è uguale a due angoli retti.*

Fig.17.

Al punto C alzate sopra AB la perpendicolare CE. L' angolo ACD è la somma degli angoli ACE, ECD; dunque ACD+BCD sarà la somma de' tre ACE, DCE, BCD. Il primo di questi è retto, gli altri due fanno insieme

l'angolo retto BCE; dunque la somma dei due angoli ACD, BCD è uguale a due angoli retti.

Corollario I. Se uno degli angoli ACD, BCD è retto, l'altro lo sarà parimente.

Fig. 18. *Corollario II.* Se la linea DE è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE.

Poichè, dall'essere DE perpendicolare ad AB ne segue che l'angolo ACD è uguale al suo adiacente DCB, e che sono ambedue retti. Ma dall'essere ACD un angolo retto, ne segue che il suo adiacente ACE è pure un angolo retto; dunque l'angolo ACE=ACD; dunque AB è perpendicolare a DE.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due linee rette che hanno due punti comuni coincidono l'una coll'altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea.

Fig. 19. Siano i due punti comuni A e B; prima di tutto le due linee non ne devono formare che una sola fra A e B, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile. Supponiamo in seguito che queste linee essendo prolungate, comincino a separarsi al punto C, l'una divenendo CD, l'altra CE. Conduciamo al punto C la linea CF che faccia con CB l'angolo retto BCF. Poichè la linea BCD è retta, l'angolo FCD sarà un angolo retto *; poichè la linea BCE è retta, l'angolo FCE sarà parimente un angolo retto. Ma la parte FCE non può essere uguale al tutto

* Pr. 2.

FCD; dunque le linee rette, che hanno due punti A e B comuni non possono separarsi in verun punto del loro prolungamento, dunque non formano che una sola e medesima linea.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Se due angoli adiacenti ACD, DCB *equivalgono insieme a due angoli retti, i due lati* AC, CB *saranno in linea retta.* Fig. 20.

Poichè se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento, allora essendo retta la linea ACE, la somma degli angoli ACD, DCE sarà uguale a due retti. Ma, per supposizione, la somma degli angoli ACD, DCB è pure uguale a due retti; dunque ACD+DCB sarebbe uguale ad ACD+DCE; togliendo da ambe le parti l'angolo ACD, resterebbe DCB=DCE, o la parte uguale al tutto, il che è impossibile. Dunque CB è il prolungamento d'AC.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Tutte le volte che due linee rette AB, DE *si tagliano, gli angoli opposti alla sommità sono uguali.*

Poichè, siccome la linea DE è retta, la somma degli angoli ACD, ACE è uguale a due retti; e siccome la linea AB è retta, la somma degli angoli ACE, BCE è pure uguale a due retti. Dunque la somma ACD+ACE, è uguale alla somma ACE+BCE. Togliendo da ambe le parti lo stesso angolo ACE, reste- Fig. 21.

rà l' angolo ACD uguale al suo opposto BCE.

Si dimostrerebbe medesimamente che l' angolo ACE è uguale al suo opposto BCD.

Scolio. I quattro angoli formati intorno a un punto da due rette che si tagliano, equivalgono insieme a quattro angoli retti. Poichè gli angoli ACE, BCE presi insieme equivalgono a due angoli retti; e gli altri due ACD, BCD hanno lo stesso valore.

Fig. 22. In generale, se quante si voglian rette CA, CB ec. si incontrano in un punto C, la somma di tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA sarà uguale a quattro angoli retti. Poiche se si formassero al punto C quattro angoli retti col mezzo di due linee perpendicolari fra loro, lo stesso spazio sarebbe occupato tanto da' quattro angoli retti, che dagli angoli successivi ACB, BCD ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 23. *Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale compreso tra lati respettivamente uguali.*

Sia l' angolo A uguale all' angolo D, il lato AB uguale a DE, il lato AC uguale a DF; dico che i triangoli ABC, DEF saranno uguali.

In fatti questi triangoli possono esser posti l' uno sull' altro in maniera che coincidano perfettamente. E in primo luogo se si pone il lato DE sul suo uguale AB, il punto D cadrà in A, e il punto E in B. Ma poichè l' angolo D è uguale all' angolo A, subito che DE sarà situato sopra AB, il lato DF prenderà la dire-

zione AC. Di più DF è uguale ad AC; dunque il punto F cadrà in C, e il terzo lato EF coprirà esattamente il terzo lato BC; dunque il triangolo DEF è uguale al triangolo ABC.

Corollario. Dunque, dall' essere uguali tre cose in due triangoli, cioè, l' angolo A=D, AB=DE, AC=DF, si può conchiudere che le altre tre lo sono pure, cioè, l' angolo B=E, l' angolo C=F, e il lato BC=EF.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Due triangoli sono uguali, quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.

Sia il lato BC uguale al lato EF, l' angolo B uguale all' angolo E, e l' angolo C all' angolo F; dico che il triangolo DEF sarà uguale al triangolo ABC.

Poichè, per eseguire la sopraposizione, sia situato EF sul suo uguale BC, il punto E cadrà in B, e il punto F in C. Poichè l' angolo E è uguale all' angolo B, il lato ED prenderà la direzione di BA; onde il punto D si troverà su qualche punto della linea BA. Così, poichè l' angolo F è uguale all' angolo C, la linea FD prenderà la direzione di CA, e il punto D si troverà su qualche punto del lato CA; dunque il punto D che deve trovarsi a un tempo stesso sulle due linee BA, CA, cadrà sulla loro intersezione A; dunque i due triangoli ABC, DEF coincidono l' uno coll' altro, e sono perfettamente uguali.

Corollario. Dunque dall' essere uguali tre

cose in due triangoli, cioè $BC=EF$, $B=E$, $C=F$, si può conchiudere che le tre altre sono pure uguali, cioè $AB=DE$, $AC=DF$, $A=D$.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

In un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Poichè, il lato BC, per esempio, è il più corto cammino da B in C; dunque BC è minore di $BA+AC$.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig.24. *Se da un punto* O *preso dentro al triangolo* ABC, *si conducono alle estremità d'un lato* BC *le linee* OB, OC, *la somma di queste linee sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC.

Sia prolungato BO finchè incontri il lato AC in D; la linea retta OC è più corta di $OD+DC$; aggiungendo da ambe le parti BO, si avrà $BO+OC<BO+OD+DC$, o $BO+OC<BD+DC$.

Si ha parimente $BD<BA+AD$; aggiungendo da ambe le parti DC si avrà $BD+DC<BA+AC$. Ma avevamo trovato $BO+OC<BD+DC$; dunque con maggior ragione $BO+OC<BA+AC$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Fig.25. *Se i due lati* AB, AC *del triangolo* ABC *sono uguali respettivamente ai due lati* DE, DF

del triangolo DEF, *se nel tempo stesso l'angolo* BAC *compreso da' primi è maggiore dell'angolo* EDF *compreso da' secondi, dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo.*

Fate l'angolo CAG=D, prendete AG=DE, e tirate CG, il triangolo GAC sarà uguale al triangolo DEF, giacchè hanno per costruzione un angolo uguale compreso fra lati uguali; si avrà dunque CG=EF. Ora possono darsi tre casi, secondo che il punto G cade fuori del triangolo ABC, o sul lato BC, o dentro al medesimo triangolo.

Primo caso. La linea retta GC è più corta di GI+IC, la linea retta AB è più corta di AI+IB; dunque GC+AB è più corta di GI+AI+IC+IB, o, ciò che torna lo stesso, GC+AB<AG+BC. Togliendo da una parte AB, e dall' altra la sua uguale AG, resterà GC<BC; ma GC=EF, dunque EF<BC. Fig.25.

Secondo caso. Se il punto G cade sul lato BC, è chiaro che GC o la sua uguale EF sarà minore di BC. Fig.26.

Terzo caso. Se il punto G cade dentro il triangolo ABC, si avrà, per il teorema precedente, AG+GC<AB+BC. Togliendo da una parte AG, e dall' altra la sua uguale AB, resterà GC<BC, o EF<BC. Fig.27.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Due triangoli che sono equilateri fra loro sono pure equiangoli. Fig.23.

Sia il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF,

dico che sarà l'angolo A=D, B=E, C=F.

Poichè, se l'angolo A fosse maggiore dell' angolo D, siccome i lati AB, AC sono respettivamente uguali ai lati DE, DF, ne seguirebbe per il teorema precedente, che il lato BC sarebbe maggiore di EF; e se l'angolo A fosse minore di D, ne seguirebbe che il lato BC sarebbe minore di EF; ma BC è uguale ad EF, dunque l'angolo A non può essere nè maggiore nè minore dell'angolo D, dunque gli è uguale. Si proverà nello stesso modo che l'angolo B=E, e che l'angolo C=F.

Scolio. Si può osservare che gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali. Così gli angoli uguali A e D sono opposti ai lati uguali BC, EF.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

Fig. 28. Sia il lato AB=AC, dico che sarà l'angolo B=C.

Tirate la linea AD dalla *sommità* A al punto D mezzo della base BC, i due triangoli ABD, ADC avranno i loro tre lati respettivamente uguali; cioè, AD comune, AB=AC per supposizione, e BD=DC per costruzione; dunque, in virtù del teorema precedente, l'angolo B è uguale all'angolo C.

Corollario. Un triangolo equilatero è nel medesimo tempo *equiangolo*, cioè ha i suoi angoli uguali.

Scolio. L' uguaglianza de' triangoli ABD, ACD prova nel tempo stesso che l' angolo BAD=DAC, e che l' angolo BDA=ADC; dunque questi due ultimi sono retti; dunque *la linea condotta dalla sommità d' un triangolo isoscele al mezzo della sua base è perpendicolare alla base, e divide l' angolo alla sommità in due parti uguali*.

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per *base* un lato qualunque, e allora la *sommità* è l' angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per *base* il lato che non è uguale agli altri.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Reciprocamente, se due angoli sono uguali in un triangolo, i lati opposti saranno pure uguali, e il triangolo sarà isoscele. Fig. 29.

Sia l' angolo ABC=ACB, dico che il lato AC sarà uguale al lato AB.

Poichè se questi lati non sono uguali, sia AB il maggiore d' essi. Prendete BD=AC, e tirate DC. L' angolo DBC è, per supposizione, uguale all' angolo ACB; i due lati DB, BC sono uguali ai due AC, BC; dunque il triangolo DBC è uguale al triangolo ABC; il che è assurdo, poichè la parte non può essere uguale al tutto. Dunque i lati AB, AC sono uguali, e il triangolo ABC è isoscele.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Di due lati d' un triangolo il maggiore è quello che è opposto ad un angolo maggiore, e re-

ciprocamente di due angoli d'un triangolo il maggiore è quello che è opposto ad un lato maggiore.

Fig. 30 1.° Sia l'angolo $C>B$, dico che il lato AB opposto all'angolo C è maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

Sia fatto l'angolo $BCD=B$; nel triangolo BDC si avrà * $BD=DC$. Ma la linea retta AC è più corta di $AD+DC$, e $AD+DC=AD+DB=AB$. Dunque AB è maggiore d'AC. *Pr. 13

2.° Sia il lato $AB>AC$, dico che l'angolo C opposto al lato AB sarà maggiore dell'angolo B opposto al lato AC.

Poichè se fosse $C<B$, seguirebbe da ciò che si è dimostrato che AB sarebbe minore d'AC, il che è contro la supposizione. Se fosse $C=B$, sarebbe * $AB=AC$, il che è pure contro la supposizione. Dunque bisogna che l'angolo C sia maggiore di B. *Pr. 13

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Fig. 31 *Da un punto dato A fuori d'una retta* DE, *non si può condurre che una sola perpendicolare a questa retta.*

Poichè supponiamo, che se ne possano condurre due AB e AC; prolunghiamo una d'esse AB d'una quantità $BF=AB$, e tiriamo FC.

Il triangolo CBF è uguale al triangolo ABC. Poichè, l'angolo CBF è retto come pure CBA, il lato CB è comune, e il lato $BF=AB$. Dunque questi triangoli sono uguali *, e ne segue che l'angolo $BCF=BCA$. L'angolo BCA è retto per supposizione, dunque l'angolo *Pr. 6.

BCF lo è pure. Ma se gli angoli adiacenti BCA, BCF equivalgono insieme a due angoli retti, bisogna che la linea ACF sia retta *; donde resulta che fra i due punti A e F si potrebbero condurre due linee rette ABF, ACF, il che è impossibile; dunque è parimente impossibile che da un medesimo punto sian condotte due perpendicolari sulla medesima linea data.

* Pr. 4.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Se da un punto A *situato fuori d' una retta* DE *si conduce la perpendicolare* AB *su questa retta, e differenti oblique* AE, AC, AD, *ec. a differenti punti di questa medesima retta;*

1.° *La perpendicolare* AB *sarà più corta d' ogni obliqua.*

2.° *Le due oblique* AC, AE, *condotte da una parte e dall' altra della perpendicolare a distanze uguali* BC, BE, *saranno uguali.*

3.° *Di due oblique* AC *e* AD, *o* AE *e* AD, *condotte come si vorrà, quella che si allontana di più dalla perpendicolare sarà la più lunga.*

Sia prolungata la perpendicolare AB d'una quantità BF=AB, e siano tirate FC, FD.

1.° Il triangolo BCF è uguale al triangolo BCA, perchè l'angolo retto CBF=CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=BA; dunque * il terzo lato CF è uguale al terzo AC. Ora ABF linea retta è più corta d'ACF linea spezzata, dunque AB metà d' ABF è più corta d' AC metà d' ACF. Dunque 1.° la perpendicolare è più corta d' ogni obliqua.

* Pr. 6.

2.° Se si suppone BE=BC, siccome si ha inoltre AB comune e l'angolo ABE=ABC, ne segue che il triangolo ABE è uguale al triangolo ABC. Dunque i lati AE, AC sono uguali. Dunque 2.° due oblique che sono lontane ugualmente dalla perpendicolare sono uguali.

3.° Nel triangolo ADF la somma delle linee AC, CF è minore * della somma de' lati AD, DF. Dunque AC metà della linea ACF, è minore d' AD metà di ADF. Dunque 3.° le oblique che sono più lontane dalla perpendicolare sono le più lunghe.

*Pr. 9

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza d'un punto da una linea, poichè è la più corta possibile.

Corollario 2.° Da un medesimo punto non si possono condurre a una medesima linea tre rette uguali. Poichè, se ciò fosse, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique uguali, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Fig.32.

Se dal punto C *mezzo della linea* AB, *si alza su questa linea la perpendicolare* EF; 1.° *ogni punto della perpendicolare sarà ugualmente distante dalle due estremità della linea* AB: 2.° *ogni punto fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle medesime estremità* A *e* B.

Poichè, 1.° siccome si suppone AC=CB, le due oblique AD, DB s'allontanano ugualmente dalla perpendicolare, dunque sono ugua-

li: lo stesso accade delle due oblique AE, EB, delle due AF, FB ec. Dunque 1.° ogni punto della perpendicolare è ugualmente distante dalle estremità A, e B.

2.° Sia I un punto fuori della perpendicolare; se si tirano IA, IB, una di queste linee taglierà la perpendicolare in D, donde si tirerà DB. Ciò posto, IB è minore di $ID+DB$; ma a cagione di $DB=DA$, si ha $ID+DB=ID+DA=IA$; dunque $IB<IA$; dunque 2.° ogni punto fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle estremità A e B.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l'ipotenusa uguale, e un lato uguale.

Sia l'ipotenusa $AC=DF$, e il lato $AB=DE$, dico che il triangolo rettangolo ABC sarà uguale al triangolo rettangolo DEF. Fig. 33.

L'uguaglianza sarebbe manifesta se il terzo lato BC fosse uguale al terzo EF; supponiamo, s'è possibile, che questi lati non siano uguali, e che BC sia il maggiore. Prendete $BG=EF$, e tirate AG. Il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF, perchè l'angolo retto B è uguale all'angolo retto E, il lato $AB=DE$, e il lato $BG=EF$; dunque questi due triangoli sono uguali *, e si ha per conseguenza $AG=DF$: ma, per supposizione, $DF=AC$; dunque $AG=AC$. Ma l'obliqua AC non può essere uguale ad AG *, giacchè è più lontana dalla perpendicolare

* Pr. 6.
* P. 16.

AB; dunque è impossibile che BC differisca da EF; dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Fig.34. *Se due linee rette* AC, BD *sono perpendicolari a una terza* AB, *queste due linee saranno parallele, cioè non potranno incontrarsi a qualunque distanza si prolunghino.*

Poichè, se potessero incontrarsi in un punto O da una parte o dall'altra della linea AB, esisterebbero due perpendicolari OA, OB condotte da un medesimo punto O sopra una medesima linea AB, il che è impossibile *. *P.15.

PROPOSIZIONE XX.

LEMMA

Fig.15. *Essendo la linea* BD *perpendicolare ad* AB, *se un altra linea* AC *fa con* AB *un angolo acuto* BAC, *dico che le linee* AC, BD *prolungate sufficientemente si incontreranno.*

Da un punto qualunque F preso nella direzione AC, sia abbassata sopra AB la perpendicolare FG. Il punto G non cadrà in A, poichè l'angolo BAF non è retto. Non può cadere neppure nella direzione AL; poichè se cadesse in H, per esempio, sia AE una perpendicolare ad AB che incontri FH in K, allora KH, e KA sarebbero due perpendicolari abbassate da un medesimo punto K sulla medesima linea AL, il che è impossibile *. Dunque bisogna che il punto G cada, *P.15.

come la figura lo rappresenta, nella direzione AI.

Sia preso adesso sulla linea AC un nuovo punto C a una distanza AC maggiore d' AF, e sia abbassata dal punto C la perpendicolare CM sopra AI; il punto M non può cadere in G, perchè si avrebbe l' angolo EGI retto come pure l' angolo FGI, e la parte sarebbe uguale al tutto. Non può cadere neppure nella direzione GL, poichè si farebbe vedere come si è fatto per la linea FH, che vi sarebbero due perpendicolari abbassate da un medesimo punto sopra la medesima linea. Dunque la perpendicolare CM deve cadere sulla direzione GI a una distanza AM maggiore d' AG.

Giacchè prendendo AC maggiore d' AF, la perpendicolare CM è più lontana da A della perpendicolare FG, ne segue che prendendo sulla linea AC dei punti sempre più lontani da A, le perpendicolari condotte da questi punti s' allontaneranno sempre più dal punto A. Sarebbe assurdo di porre dei limiti all' aumento della distanza AM a misura che il punto C si allontana. Poichè se, per esempio, si supponesse che CM è l' ultima perpendicolare o la più lontana dal punto A, si dimostrerebbe sempre nella medesima maniera, che prendendo il punto P sul prolungamento d' AC, la perpendicolare PN cadrebbe a una distanza AN maggiore d' AM, il che contradice la supposizione che CM è la perpendicolare la più lontana.

Dunque le perpendicolari abbassate da differenti punti della linea AC sopra AI passano a distanze grandi quanto si vuole dal punto A; dunque ve ne sarà una che passerà per B, e che sarà confusa colla perpendicolare BD; dunque le linee AC, BD prolungate devono incontrarsi.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Fig. 36. *Se due rette* AC, BD, *fanno con una terza* AB *due angoli interni* CAB, ABD, *la di cui somma sia uguale a due retti, le due linee* AC, BD *saranno parallele.*

Dal punto G mezzo d' AB tirate la retta EGF perpendicolare sopra AC. Se si paragona il triangolo AGE col triangolo GBF, si trova il lato AG=GB per costruzione, l'angolo AGE=BGF come opposti alla sommità *; di più l' angolo GAE=GBF, perchè GBD+GAE equivalgono a due angoli retti per supposizione, e GBD+GBF parimente equivalgono a due retti *; dunque togliendo da ambe le parti l'angolo GBD, resterà l'angolo GAE=GBF; dunque i triangoli GAE, GBF hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali; dunque sono uguali *; dunque l'angolo GFB=GEA. Ma l' angolo GEA è retto per costruzione; dunque le linee AC, BD sono perpendicolari sopra una medesima linea EF; dunque esse sono parallele *.

* Pr. 5.

* Pr. 2.

* Pr. 7.

* P. 19.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Se due linee rette AI, BD *fanno con una terza* AB *due angoli* BAI, ABD, *la di cui somma sia minore di due retti, le linee* AI, BD *prolungate s' incontreranno.*

Conducete AC in modo che i due angoli CAB, ABD, equivalgano insieme a due angoli retti, e compite il resto della costruzione come nel teorema precedente. Poichè l'angolo AEK è retto, AE è una perpendicolare più corta dell' obliqua AK; dunque * nel triangolo AEK, l' angolo AKE opposto al lato AE è minore dell'angolo retto AEK opposto al lato AK. Ma l' angolo IKF=AKE; dunque l'angolo IKF è minore d' un retto; dunque le linee KI, FD prolungate devono incontrarsi *.

* P.14.
* P.20.

Scolio. Se le linee AM e BD facessero con AB due angoli BAM, ABD, la di cui somma fosse maggiore di due angoli retti, allora le due linee AM, BD non s' incontrerebbero al di sopra d' AB, ma s' incontrerebbero al di sotto; perchè i due angoli ABD, ABF equivalgono a due retti, e i due angoli BAM, BAN equivalgono pure a due retti; dunque questi quattro angoli presi insieme equivalgono a quattro angoli retti. Ma la somma de' due angoli BAM, ABD è più di due angoli retti; dunque la somma de' due restanti BAN, ABF è meno; dunque le due linee AN, BF prolungate devono incontrarsi.

Corollario. Per un punto dato A non si può

condurre che una sola parallela a una linea data BD.

Poichè subito che AC è parallela a BD, ogni altra linea AI o AM condotta da una parte o dall'altra della linea AC è tale che la somma degli angoli interni è maggiore o minore di due angoli retti; dunque essa deve incontrare la linea BD.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Fig. 37. *Se due linee parallele* AB, CD *sono incontrate da una segante* EF, *la somma de' due angoli interni* AGO, GOC *sarà uguale a due angoli retti.*

Poichè se fosse maggiore, o minore, le due linee AB, CD s'incontrerebbero da una parte o dall'altra, e non sarebbero parallele.

Corollario I. Se l'angolo GOC è retto l'angolo AGO dev'esserlo pure; dunque ogni linea perpendicolare a una delle parallele è perpendicolare anche all'altra.

Corollario II. Poichè AGO+GOC è uguale a due angoli retti, e che GOD+GOC è pure uguale a due angoli retti, togliendo da una parte e dall'altra GOC, si avrà l'angolo AGO=GOD. Per conseguenza i quattro angoli acuti EGB, AGO, GOD, COF sono uguali fra loro: accade lo stesso de' quattro angoli ottusi AGE, OGB, COG, DOF; e nel tempo stesso, se si aggiunge uno de' quattro angoli acuti a uno de' quattro ottusi, la somma farà sempre due angoli retti.

Scolio. Si danno ordinariamente de' nomi

particolari ad alcuni di questi angoli paragonati due a due. Abbiamo già chiamato gli angoli AGO, GOC *interni da una medesima parte*; gli angoli BGO, GOD hanno il medesimo nome. Gli angoli AGO, GOD si chiamano *alterni-interni*, o semplicemente *alterni*; e così pure gli angoli BGO, GOC. Gli angoli EGB, GOD si chiamano *interni-esterni*; e finalmente gli angoli EGB, COF prendono il nome di *alterni-esterni*. Si possono dunque riguardare le seguenti proposizioni come già dimostrate.

Gli angoli interni da una medesima parte presi insieme equivalgono a due angoli retti.

Gli angoli alterni-interni sono uguali.

Gli angoli interni-esterni sono uguali.

Gli angoli alterni-esterni sono uguali.

Reciprocamente, se gli angoli così denominati sono uguali, si può conchiudere che le linee alle quali si rapportano sono parallele. Sia, per esempio, l'angolo AGO=GOD; poichè GOC+GOD è uguale a due retti, si avrà pure AGO+GOC uguale a due retti; dunque * le linee AG, CO sono parallele. *P.21.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Due linee AB, CD *parallele a una terza* EF *sono parallele fra loro*. Fig.38.

Conducete la segante PQR perpendicolare ad EF. Poichè AB è parallela ad EF, PR sarà perpendicolare ad AB *; parimente poichè CD è parallela ad EF, la medesima segante PR sarà perpendicolare a CD; *Co.I. Pr.23.

dunque AB e CD sono perpendicolari alla medesima linea PQ; dunque sono parallele *.

*P.19

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Fig.39. *Due parallele sono per tutto ugualmente distanti.*

Fra le due parallele AC, BD conducete ovunque vorrete le due perpendicolari AB, CD, dico che queste due perpendicolari sono uguali.

Le linee AB, CD perpendicolari ad una delle parallele, sono nel medesimo tempo perpendicolari all'altra *; e se si conduce EF perpendicolare sul mezzo d'AC, EF sarà pure perpendicolare a BD, talmente che tutti gli angoli in A, E, C, B, F, D saranno retti. Ciò posto, dico che il quadrilatero AEFB può essere situato esattamente sul quadrilatero CEFD; poichè, il lato EF è comune, l'angolo AEF è uguale ad FEC, e il lato EA è uguale ad EC per costruzione: dunque il punto A cadrà in C. Ma l'angolo EAB è uguale ad ECD; dunque AB e CD saranno in una medesima direzione. D'altronde l'angolo EFB=EFD; dunque FB e FD saranno pure nella medesima direzione; dunque i due quadrilateri coincideranno intieramente uno coll'altro, e sarà per conseguenza AB=CD.

*P.23.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Fig.40. *Se due angoli* BAC, DEF *hanno i lati re-*

spettivamente paralleli, e diretti nel medesimo senso, questi due angoli saranno uguali.

Prolungate, s'è necessario, DE finchè incontri AC in G; l'angolo DEF è uguale a DGC, perchè EF è parallela a GC *; l'angolo DGC è uguale a BAC, perchè DG è parallela ad AB; dunque l'angolo DEF è uguale a BAC.

* P. 23.

Scolio. Si pone in questa proposizione la condizione che EF sia diretto nel medesimo senso di AC, e ED nel medesimo senso d'AB; perchè se si prolunga FE verso H, l'angolo DEH avrà i suoi lati paralleli a quelli dell'angolo BAC; ma questi angoli non saranno uguali, perchè EH ed AC sono diretti in senso contrario: in questo caso l'angolo DEH, e l'angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

Se si prolunga il lato CA *d'un triangolo verso* D, *l'angolo esterno* BAD *sarà uguale alla somma dei due interni e opposti* B *e* C.

Fig. 41.

Conducete AE parallela a CB; per rapporto alla segante AB gli angoli BAE, ABC sono uguali * come *alterni-interni*; per rapporto alla segante CD gli angoli DAE, ACB sono uguali come *interni-esterni*; dunque BAE+DAE o BAD=ABC+ACB.

* P. 23.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA

I tre angoli d'un triangolo presi insieme equivalgono a due angoli retti.

Poichè, in virtù del teorema precedente, B+C=BAD; aggiungendo da ambe le parti l'angolo A o BAC, si avrà A+B+C=BAC +BAD= due angoli retti.

Corollario I. Essendo dati due angoli di un triangolo, o essendo data soltanto la loro somma, si conoscerà il terzo, togliendo la somma de' due angoli dati da due angoli retti.

Corollario II. Se due angoli d'un triangolo sono uguali respettivamente a due angoli d'un altro triangolo, il terzo angolo dell'uno sarà uguale al terzo dell'altro, e questi due triangoli saranno equiangoli fra loro.

Corollario III. In un triangolo non può esservi che un solo angolo retto; poichè, se ve ne fossero due, il terzo angolo sarebbe niente. Molto più un triangolo non può avere che un solo angolo ottuso.

Corollario IV. In un triangolo rettangolo la somma de' due angoli acuti è uguale a un angolo retto.

Corollario V. In un triangolo equilatero ogni angolo è la terza parte di due angoli retti, ovvero è due terzi d'un angolo retto.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

La somma di tutti gli angoli interni d'un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quanti lati di più di due ha il poligono.

Fig.42. Sia ABCDEFG un poligono di quanti si voglian lati; se si tira la *diagonale* AC che recide il triangolo ABC, si vede facilmente che la somma degli angoli del poligono

ABCDEFG comprende quella del poligono ACDEFG, che ha un lato di meno, più la somma degli angoli del triangolo BAC, che è uguale a due angoli retti; dunque la somma degli angoli d' un quadrilatero è uguale alla somma degli angoli d'un triangolo più due angoli retti, in tutto quattro angoli retti; la somma degli angoli d' un pentagono è uguale a quella d'un quadrilatero più due angoli retti, in tutto sei angoli retti; e così di seguito aumentando di due angoli retti a misura che il poligono ha un lato di più; dunque la somma degli angoli d'un poligono è uguale a tante volte due angoli retti quanti lati esso ha di più di due.

Corollario. Se un poligono è *equiangolo*, cioè se ha tutti i suoi angoli uguali, si troverà il valore d'ognuno dividendo la somma di tutti per il loro numero. Così nel quadrilatero equiangolo, ogni angolo è retto; nel pentagono equiangolo, ogni angolo è la quinta parte di sei angoli retti; nell' esagono equiangolo, ogni angolo è la sesta parte di otto angoli retti, o la terza parte di quattro, ec.

Scolio. Se si volesse applicare la proposizione presente a un poligono che avesse uno o più angoli rientranti, bisognerebbe considerare ogni angolo rientrante come maggiore di due angoli retti. Ma per evitare ogni imbarazzo, non considereremo quì ed in seguito che que' poligoni soltanto i di cui angoli sporgono infuori, e che si possono chiamare *poligoni convessi*. Ogni poligono convesso è

Fig. 43.

tale che una linea retta condotta a capriccio non può incontrare il contorno di questo poligono che in due soli punti.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA

I lati opposti d'un parallelogrammo sono uguali, e così pure gli angoli opposti.

Fig. 44. Tirate la diagonale BD; i due triangoli ADB, DBC hanno il lato comune BD; di più, a cagione delle parallele AD, BC, l'angolo ADB=DBC *, e a cagione delle parallele AB, CD, l'angolo ABD=BDC. Dunque i due triangoli ABD, DBC sono uguali *; dunque il lato AB opposto all'angolo ADB è uguale al lato DC opposto all'angolo uguale DBC, come pure AD=BC; dunque i lati opposti d'un parallelogrammo sono uguali.

* P. 23

* Pr. 7

In secondo luogo, dall'uguaglianza de'medesimi triangoli ne segue che l'angolo A è uguale all'angolo C, e similmente che l'angolo ADC composto de'due angoli ADB, BDC è uguale all'angolo ABC composto de'due angoli DBC, ABD; dunque gli angoli opposti d'un parallelogrammo sono uguali.

Corollario. Dunque due parallele AB, CD comprese fra due altre parallele AD, BC sono uguali.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA

Fig 44. *Se in un quadrilatero* ABCD *i lati opposti sono uguali, talmente che sia* AB=CD, *e* AD=BC, *questi lati saranno ancora paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.*

Poichè, tirando la diagonale BD, i due triangoli ABD, BDC avranno i tre lati respettivamente uguali; dunque saranno uguali; dunque l'angolo ADB opposto al lato AB è uguale all' angolo DBC opposto al lato CD; dunque * il lato AD è parallelo a BC. Per una simile ragione AB è parallelo a CD; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

* P.23.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA

Se due lati opposti AB, CD *d' un quadrilatero sono uguali e paralleli, i due altri lati saranno parimente uguali e paralleli, e la figura* ABCD *sarà un parallelogrammo.*

Sia tirata la diagonale BD; poichè AB è parallela a CD, l' angolo ABD=BDC: d'altronde il lato AB=DC, il lato BD è comune: dunque il triangolo ABD è uguale al triangolo DBC *; dunque il lato AD=BC, e l' angolo ADB=DBC, e per conseguenza AD è parallela a BC; dunque la figura ABCD è un parallelogrammo.

* Pr. 6.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA

Le due diagonali AC, BD *d' un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti uguali.*

Fig. 45.

Poichè, paragonando il triangolo ADO al triangolo COB, si trova il lato AD=CB, l'angolo ADO=CBO, e l'angolo DAO=OCB; dunque questi due triangoli sono uguali *; dunque AO lato opposto all'angolo ADO è uguale ad OC lato opposto all' angolo OBC; dunque anche DO=OB.

* Pr. 7.

LIBRO SECONDO

CONTINUAZIONE DE' PRINCIPJ

DEFINIZIONI

Fig.46. 1. La *circonferenza del circolo* è una linea curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Il *circolo* è lo spazio compreso da questa linea curva.

N. B. Talora nel discorso si confonde il circolo colla circonferenza; ma sarà sempre facile di ristabilire l'esattezza delle espressioni ricordandosi che il circolo è una superficie che ha lunghezza e larghezza, mentre la circonferenza non è che una linea.

2. Ogni linea, come CA, CE, CD ec., condotta dal centro alla circonferenza si chiama *raggio*, o *semi-diametro*. Ogni linea, come AB, che passa per il centro e che è terminata da ambe le parti alla circonferenza si chiama *diametro*.

In virtù della definizione del circolo, tutti i raggi sono uguali; tutti i diametri sono pure uguali e doppi del raggio.

3. Si chiama *arco* una porzione di circonferenza come FHG.

La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta FG che unisce le sue due estremità.

4. *Segmento* è la superficie o porzione di cerchio compresa fra l'arco e la corda.

N. B Alla medesima corda FG corrispondono sempre due archi FHG, FEG, e per conseguenza anche due segmenti; ma s'intende sempre di parlare del minore, a meno che non si esprima il contrario.

5. *Settore* è la parte del circolo compresa fra un arco DE, e i due raggi CD, CE condotti alle estremità del medesimo arco.

6. Si chiama *linea inscritta nel circolo*, quella le di cui estremità sono alla circonferenza, come AB: Fig. 47.

Angolo inscritto, un angolo come BAC, la di cui sommità è alla circonferenza, e che è formato da due corde:

Triangolo inscritto, un triangolo come BAC, i di cui tre angoli hanno le loro sommità alla circonferenza:

E in generale *figura inscritta*, quella di cui tutti gli angoli hanno la loro sommità alla circonferenza; nel tempo stesso si dice che il circolo è *circoscritto* a una tal figura.

7. Si chiama *segante* una linea che incontra la circonferenza in due punti: tale è AB. Fig. 48.

8. *Tangente* è una linea che non ha che un sol punto di comune colla circonferenza; tale è CD.

9. Parimente due circonferenze sono *tangenti* l'una dell'altra quando hanno un sol punto di comune.

10. Un poligono è *circoscritto a un circolo*, quando tutti i suoi lati sono *tangenti* della circonferenza; nello stesso caso si dice che il circolo è *inscritto* nel poligono.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Ogni diametro AB *divide il circolo e la sua circonferenza in due parti uguali.*

Fig. 49. Poichè, se si applica la figura AEB sopra ADB, conservando la base comune AB, bisognerà che la linea curva AEB cada esattamente sulla linea curva ADB, altrimenti vi sarebbero nell'una o nell'altra dei punti disugualmente lontani dal centro, il che è contro la definizione del circolo.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Ogni corda è minore del diametro.

Poichè, se alle estremità della corda AD si conducono i raggi AC, CD, si avrà $AD < AC + CD$, o $AD < AB$.

Corollario. Dunque la maggior linea retta che si possa inscrivere in un circolo è uguale al di lui diametro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.

Poichè, se l'incontrasse in tre, questi tre punti sarebbero ugualmente distanti dal centro; vi sarebbero dunque tre linee uguali condotte da uno stesso punto sopra una medesima linea retta, il che è impossibile *.

* P. 16. Lib. I.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

In un medesimo circolo o in circoli uguali, gli archi uguali sono sottesi da corde uguali, e reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali.

Essendo il raggio AC uguale al raggio EO, e l'arco AMD uguale all'arco ENG, dico che la corda AD sarà uguale alla corda EG. Fig 50.

Poichè, essendo il diametro AB uguale al diametro EF, il mezzo-circolo AMDB potrà applicarsi esattamente sul mezzo-circolo ENGF, e la linea curva AMDB coinciderà intieramente colla linea curva ENGF. Ma si suppone la parte AMD uguale alla parte ENG; dunque il punto D cadrà sul punto G; dunque la corda AD è uguale alla corda EG.

Reciprocamente, supponendo sempre il raggio AC=EO, se la corda AD=EG, dico che l'arco AMD sarà uguale all'arco ENG.

Poichè, tirando i raggi CD, OG i due triangoli ACD, EOG avranno i tre lati respettivamente uguali, cioè AC=EO, CD=OG, e AD=EG; dunque questi triangoli sono uguali, e l'angolo ACD=EOG. Ma ponendo il mezzo-circolo ADB sul suo uguale EGF, poichè l'angolo ACD=EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, e il punto D sul punto G; dunque l'arco AMD è uguale all'arco ENG.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Nel medesimo circolo, o in circoli uguali ur

arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente; purchè gli archi di cui si tratta siano minori d'una mezza-circonferenza.

Poichè, sia l'arco AH maggiore di AD, e siano condotte le corde AD, AH, e i raggi CD, CH: i due lati AC, CH del triangolo ACH sono uguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD: l'angolo ACH è maggiore di ACD; dunque * il terzo lato AH è maggiore del terzo AD; dunque la corda che sottende l'arco maggiore è la maggiore.

* P 10. Lib. I.

Reciprocamente, se la corda AH vien supposta maggiore d'AD, si conchiuderà dagli stessi triangoli che l'angolo ACH è maggiore d'ACD, e che perciò l'arco AH è maggiore di AD.

Scolio. Noi supponiamo che gli archi di cui si tratta siano minori della mezza-circonferenza. Accade il contrario quando sono maggiori; allora aumentando l'arco diminuisce la corda, e reciprocamente. Così essendo l'arco AKBD maggiore di AKBH, la corda AD è minore di AH.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 51.

Il raggio GC, *perpendicolare ad una corda* AB, *divide questa corda e l'arco sotteso* AGB, *ciascuno in due parti uguali*.

Conducete i raggi AC, CB; questi raggi sono, per rapporto alla perpendicolare CD, due oblique uguali; dunque si allontanano ugualmente dalla perpendicolare; dunque AD=DB.

In secondo luogo, poichè AD=DB, CG è una perpendicolare inalzata sul mezzo d' AB; dunque * ogni punto di questa perpendicolare deve essere ugualmente distante dalle due estremità A e B. Il punto G è uno di questi punti; dunque la distanza AG=GB. Ma se la corda AG è uguale alla corda GB, l' arco AG sarà uguale all' arco GB; dunque il raggio CG perpendicolare alla corda AB divide l' arco sotteso da questa corda in due parti uguali al punto G.

* P. 17. Lib. I.

Scolio. Il centro C, il mezzo D della corda AB, e il mezzo G dell' arco sotteso da questa corda, sono tre punti situati sopra una medesima linea perpendicolare alla corda. Ora bastano due punti per determinare la posizione d' una linea; dunque ogni linea che passa per due dei punti menzionati passerà necessariamente per il terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

Ne segue pure che *la perpendicolare inalzata sul mezzo d' una corda passa per il centro, e per il mezzo dell' arco sotteso dalla stessa corda*.

Poichè, questa perpendicolare si confonde con quella che sarebbe abbassata dal centro sulla medesima corda, giacchè passano ambedue per il mezzo della corda.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Fig. 52.

Per tre punti dati A, B, C *non situati in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza, ma non se ne può far passare che una sola.*

Tirate AB, BC, e dividete queste due linee in due parti uguali colle perpendicolari DE, FG; dico primieramente che queste perpendicolari s'incontreranno in un punto O.

Poichè, le linee DE, FG si taglieranno necessariamente se non sono parallele. Or supponiamo che fossero parallele, la linea BD perpendicolare a DE sarebbe, prolungandola, perpendicolare a FG *; ma BK prolungamento di BD è differente da BF, poichè i tre punti A, B, C non sono in linea retta; dunque vi sarebbero due perpendicolari BF, BK abbassate da uno stesso punto sulla medesima linea, il che è impossibile; dunque le perpendicolari DE, FG si taglieranno sempre in un punto O.

* P. 23. Lib. I.

Adesso, il punto O, come appartenente alla perpendicolare DE, è ad uguale distanza dai due punti A e B; il medesimo punto O, come appartenente alla perpendicolare FG, è a ugual distanza da' due punti B, C; dunque le tre distanze OA, OB, OC sono uguali; dunque la circonferenza descritta col centro O e col raggio OB passerà per i tre punti dati A, B, C.

Resta così provato che si può sempre far passare una circonferenza per tre punti dati non in linea retta; dico di più che non si può farvene passare che una sola.

Poichè, se vi fosse una seconda circonferenza che passasse per i tre punti dati A, B, C, il suo centro non potrebbe esser fuori della linea DE *, poichè allora sarebbe disugualmente lontano da A e da B, nè fuori

* P. 17. Lib. I.

della linea FG per una simil ragione; dunque sarebbe nel tempo stesso sulle due linee DE, FG. Or due linee rette non possono tagliarsi in più d' un punto; dunque non v' è che una sola circonferenza che possa passare per tre punti dati.

Corollario. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; poichè se avessero tre punti comuni, avrebbero il medesimo centro, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Due corde uguali sono ugualmente lontane dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro.

1.° Sia la corda AB=DE: conducete dal centro le perpendicolari CF, CG su queste corde, e tirate i raggi CA, CD. Fig. 53.

I triangoli rettangoli CAF, CDG hanno le ipotenuse CA, CD uguali; di più il lato AF metà di AB è uguale al lato DG metà di DE; dunque questi triangoli sono uguali * e il terzo lato CF è uguale al terzo CG; dunque 1.° le due corde uguali AB, DE sono ugualmente lontane dal centro.

* P. 18. Lib. I.

2.° Sia la corda AH maggiore di DE, l' arco AKH sarà maggiore dell' arco DME *; sull' arco AKH prendete la parte ANB=DME, tirate la corda AB, e abbassate CF perpendicolare su questa corda, e CI perpendicolare sopra AH: è chiaro che CF è maggiore di CO, e CO maggiore di CI; dunque molto più

* Pr. 5.

$CF > CI$. Ma $CF = CG$, poichè le corde AB, DE sono uguali; dunque $CG > CI$; dunque la minore di due corde disuguali è la più lontana dal centro.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig. 54. *La perpendicolare* BD *condotta all' estremità del raggio* CA *è una tangente della circonferenza.*

Poichè ogni obliqua CE è maggiore della perpendicolare CA; dunque il punto E è fuori del circolo; dunque la linea BD ha il solo punto A comune colla circonferenza, e per conseguenza BD è una tangente.

Scolio. Non si può condurre da un punto dato A che una sola tangente AD alla circonferenza; poichè se se ne potesse condurre un altra, questa non sarebbe più perpendicolare al raggio CA; dunque, per rapporto a questa nuova tangente, il raggio CA sarebbe un obliqua, e la perpendicolare abbassata dal centro su questa tangente sarebbe minore di CA; dunque questa pretesa tangente entrerebbe nel circolo, e sarebbe una segante.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Fig. 55. *Due parallele* AB, DE *intercettano sulla circonferenza archi uguali* MN, PQ.

Possono accadere due casi.

1.° Se le due parallele sono seganti, conducete il raggio CH perpendicolare alla corda

MP, sarà nel medesimo tempo perpendicolare alla sua parallela NQ; dunque il punto H sarà a un tempo stesso il mezzo dell'arco MHP, e quello dell'arco NHQ; si avrà dunque l'arco MH=HP e l'arco NH=HQ; quindi resulta MH−NH=HP—HQ, cioè MN=PQ.

2.° Se di due parallele AB, DE, una è segante, l'altra tangente, conducete il raggio CH al punto del contatto H; questo raggio sarà perpendicolare alla tangente DE ed alla sua parallela MP. Ma poichè CH è perpendicolare alla corda MP, il punto H è il mezzo dell'arco MHP; dunque gli archi MH, HP compresi tra le parallele AB, DE sono uguali. Fig. 56.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Se due circonferenze si tagliano in due punti, la linea che passa per i loro centri sarà perpendicolare a quella che unisce i punti d'intersezione, e la dividerà in due parti uguali.

Poichè, la linea AB che unisce i punti d'intersezione è una corda comune ai due circoli. Or se sul mezzo di questa corda si alza una perpendicolare, essa deve passare per ciascuno de' due centri C e D. Ma per due punti dati non può passare che una sola linea retta; dunque la linea retta condotta per i centri sarà perpendicolare sul mezzo della corda comune. Fig. 57. e 58.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Se la distanza de' due centri è minore della

somma de' raggi, e se nel tempo stesso il maggior raggio è minore del più piccolo aggiunto alla distanza dei céntri, i due circoli si taglieranno.

Fig. 57. e 58. Poichè, affinchè abbia luogo l'intersezione, bisogna che il triangolo CAD sia possibile. Bisogna dunque, non solamente che CD sia < AC+AD, ma che anche il maggior raggio AD sia < AC+CD. Or tutte le volte che il triangolo CAD sarà possibile, è chiaro che le circonferenze descritte co' centri C e D si taglieranno in A e B.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Fig. 59. *Se la distanza* CD *de' centri de' due circoli è uguale alla somma dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno esternamente.*

È chiaro che avranno il punto A comune; ma avranno questo solo punto: poichè per aver due punti comuni, bisognerebbe che la distanza dei centri fosse minore della somma de' raggi.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Fig. 60. *Se la distanza* CD *dei centri di due circoli è uguale alla differenza dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno internamente.*

In primo luogo è chiaro che hanno il punto A comune: non ne possono avere alcun'altro; poichè, affinchè ciò accadesse, bisognerebbe che il maggior raggio AD fosse minore dell'altro raggio AC unito alla distanza dei centri CD, il che non ha luogo.

Corollario. Dunque se due circoli si toccano, o internamente, o esternamente, i centri e il punto del contatto sono sulla medesima linea retta.

Scolio. Tutti i circoli che hanno il loro centro sulla retta CD, e che passano per il punto A, sono tangenti gli uni degli altri; non hanno fra loro che il solo punto A di comune. E se per il punto A si conduce AE perpendicolare a CD, la retta AE sarà una tangente comune a tutti questi circoli.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Nel medesimo circolo o in circoli uguali, gli Fig.61. *angoli uguali* ACB, DCE *la di cui sommità è al centro, intercettano sulla circonferenza degli archi uguali* AB, DE.

Reciprocamente, se gli archi AB, DE *sono uguali, gli angoli* ACB, DCE *saranno pure uguali*.

Poichè, 1.° se l'angolo ACB è uguale all'angolo DCE, questi due angoli potranno situarsi l'uno sull'altro; e siccome i loro lati sono uguali è chiaro che il punto A cadrà in D, e il punto B in E. Ma allora l'arco AB deve pur cadere sull'arco DE; poichè se i due archi non fossero confusi in un solo, vi sarebbero nell'uno o nell'altro dei punti disugualmente lontani dal centro, il che è impossibile; dunque l'arco AB=DE.

2.° Se si suppone AB=DE, dico che l'angolo ACB sarà uguale all'angolo DCE. Poichè, se questi angoli non sono uguali, sia

ACB il maggiore, e sia preso ACI=DCE; si avrà per ciò che si è dimostrato AI=DE: ma per supposizione l'arco AB=DE; dunque si avrebbe AI=AB, o la parte uguale al tutto, il che è impossibile; dunque l'angolo ACB=DCE.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Fig. 63. *Nel medesimo circolo o in due circoli uguali, se due angoli al centro* ACB, DCE *stanno fra loro come due numeri intieri, gli archi intercetti* AB, DE *staranno fra loro come i medesimi numeri, e si avrà questa proporzione*:

Angolo ACB : angolo DCE :: arco AB : arco DE.

Supponiamo, per esempio, che gli angoli ACB, DCE stiano fra loro come 7 stà a 4; o, il che torna lo stesso, supponiamo che l'angolo M che servirà di misura comune sia contenuto sette volte nell'angolo ACB, e quattro nell'angolo DCE. Gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, *n*C*p*, ec. DC*x*, *x*C*y*, ec. essendo uguali fra loro, gli archi parziali A*m*, *mn*, *np*, ec. D*x*, *xy*, ec. saranno pure fra loro uguali; dunque l'arco intiero AB starà all'arco intiero DE come 7 stà a 4. Ora è manifesto che lo stesso ragionamento avrebbe sempre luogo, quando in vece di 7 e 4 si avessero altri numeri qualunque; dunque se il rapporto degli angoli ACB, DCE può essere espresso in numeri intieri, gli archi AB, DE staranno fra loro come gli angoli ACB, DCE.

Scolio. Reciprocamente se gli archi AB, DE stassero fra loro come due numeri intieri, gli angoli ACB, DCE starebbero fra loro come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB : DCE : : AB : DE.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Qualunque sia il rapporto de' due angoli ACB, ACD, *questi due angoli staranno sempre fra loro come i due archi* AB, AD, *intercetti fra i loro lati, e descritti dalle loro sommità come centri con raggi uguali.* Fig. 63.

Supponiamo l'angolo minore situato dentro il maggiore; se non è vera la proporzione enunziata, l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB stà a un arco maggiore o minore di AD. Supponiamo quest'arco maggiore, e rappresentiamolo con AO, avremo perciò:

Ang. ACB : ang. ACD : : arc. AB : arc. AO.

Imaginiamo adesso che l'arco AB sia diviso in parti uguali di cui ciascuna sia minore di DO, vi sarà almeno un punto di divisione fra D e O: sia I questo punto, e tiriamo CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri intieri, e si avrà per il teorema precedente:

Ang. ACB : ang. ACI : : arc. AB : arc. AI.

Confrontando queste due proporzioni una coll'altra, e osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò:

Ang. ACD : ang. ACI : : arc. AO : arc. AI.

Ma l'arco AO è maggiore dell'arco AI; bisognerebbe dunque, perchè sussistesse la proporzione, che l'angolo ACD fosse maggiore dell'angolo ACI; ora al contrario è minore; dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'angolo ACD come l'arco AB sta a un arco maggiore di AD.

Si dimostrerebbe con un ragionamento affatto simile che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AD; dunque esso è esattamente AD, e si ha la proporzione:

Ang. ACB : ang. ACD : : arc. AB : arc. AD.

Corollario. Poichè l'angolo al centro del circolo, e l'arco intercetto fra i suoi lati hanno un tal legame, che quando l'uno aumenta o diminuisce in un rapporto qualunque, l'altro aumenta o diminuisce nel medesimo rapporto, si può stabilire una di queste grandezze per misura dell'altra. Onde noi prenderemo da qui innanzi l'arco AB per misura dell'angolo ACB. Bisogna solamente osservare, nel paragonare gli angoli fra loro, che gli archi che servono loro di misura devono essere descritti con raggi uguali; poichè ciò vien supposto in tutte le proposizioni precedenti.

Scolio I. Pare più naturale il misurare una quantità con una quantità della medesima specie, e dietro questo principio converrebbe riportare tutti gli angoli all'angolo retto; così

essendo l'angolo retto l'unità di misura, un angolo acuto sarebbe espresso da un numero compreso fra 0 e 1, e un angolo ottuso da un numero fra 1 e 2. Ma questa maniera d'esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda per l'uso; è stato trovato molto più semplice il misurarli con archi di circolo, a motivo della facilità di fare degli archi uguali ad archi dati, e per molte altre ragioni. Del rimanente, se la misura degli angoli per mezzo degli archi di circolo è in qualche modo indiretta, è ugualmente facile l'ottenere col loro mezzo la misura diretta e assoluta. Poichè, se paragonate l'arco che serve di misura ad un angolo colla quarta parte della circonferenza, avrete il rapporto dell'angolo dato all'angolo retto, che è la misura diretta.

Scolio II. Tutto ciò che è stato dimostrato nelle tre proposizioni precedenti per la comparazione degli angoli cogli archi ha luogo ugualmente per la comparazione dei settori cogli archi; poichè i settori sono uguali quando lo sono gli angoli, e in generale seguono la medesima proporzione; dunque *due settori* ACB, ACD *presi nel medesimo circolo, o in circoli uguali, stanno fra loro come gli archi* AB, AD *di questi stessi settori.*

Si vede da ciò che gli archi di circolo che servono di misura agli angoli, possono parimente servire di misura ai settori d'un medesimo circolo, o di circoli uguali.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

L'angolo inscritto BAD *ha per misura la metà dell'arco* BD *compreso fra i suoi lati.* Fig. 64.

Supponiamo in primo luogo che il centro del circolo sia situato dentro l'angolo BAD, si condurrà il diametro AE, e i raggi CB, CD. L'angolo BCE esterno per rispetto al triangolo ABC è uguale alla somma dei due interni CAB, ABC: ma essendo il triangolo BAC isoscele, l'angolo CAB=ABC; dunque l'angolo BCE è doppio di BAC. L'angolo BCE come angolo al centro ha per misura l'arco BE; dunque l'angolo BAC avrà per misura la metà di BE. Per una simil ragione l'angolo CAD avrà per misura la metà di ED; dunque BAC+CAD o BAD avrà per misura la metà di BE+ED o la metà di BD.

Fig. 65. Supponiamo in secondo luogo che il centro C sia situato fuori dell'angolo BAD, allora conducendo il diametro AE, l'angolo BAE avrà per misura la metà di BE, l'angolo DAE la metà di DE; dunque la loro differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di ED, o la metà di BD.

Dunque ogni angolo inscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Fig. 66. *Corollario I.* Tutti gli angoli BAC, BDC ec. inscritti nel medesimo segmento sono uguali; perchè hanno per misura la metà dell'arco BOC.

Fig. 67. *Corollario II.* Ogni angolo BAD inscritto nel mezzo-circolo è un angolo retto; poichè ha per misura la metà della mezza-circonferenza BOD, o la quarta parte della circonferenza.

Per dimostrare la stessa cosa in altra ma-

niera tirate il raggio AC; il triangolo BAC è isoscele, onde l'angolo BAC=ABC; il triangolo CAD è parimente isoscele, e l'angolo CAD=ADC; dunque BAC+CAD o BAD =ABD+ADB: ma se i due angoli B e D del triangolo ABD equivalgono insieme al terzo BAD, i tre angoli del triangolo equivarranno a due volte l'angolo BAD; essi equivalgono d'altronde a due angoli retti; dunque l'angolo BAD è un angolo retto.

Corollario III. Ogni angolo BAC inscritto in un segmento maggiore del mezzo-circolo è un angolo acuto; poichè ha per misura la metà dell'arco BOC minore d'una mezza-circonferenza. Fig. 66.

E ogni angolo BOC inscritto in un segmento minore del mezzo-circolo è un angolo ottuso; poichè ha per misura la metà dell'arco BAC maggiore d'una mezza-circonferenza.

Corollario IV. Gli angoli opposti A e C d'un quadrilatero inscritto ABCD equivalgono insieme a due angoli retti; poichè l'angolo BAD ha per misura la metà dell'arco BCD, l'angolo BCD ha per misura la metà dell'arco BAD; dunque i due angoli BAD, BCD presi insieme hanno per misura la metà della circonferenza, che equivale a due angoli retti. Fig. 68.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

L'angolo BAC *formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco* ADC *compreso fra i suoi lati.* Fig. 69.

Al punto di contatto A conducete il dia-

metro AD; l'angolo BAD è retto, e ha per misura la metà della mezza-circonferenza AMD, l'angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD+DAC o BAC ha per misura la metà di AMD più la metà di DC, o la metà dell' arco intiero ADC.

Si dimostrerebbe medesimamente che l'angolo CAE ha per misura la metà dell'arco AC compreso fra i suoi lati.

PROBLEMI RELATIVI AI DUE PRIMI LIBRI

PROBLEMA I.

Fig. 70. *Dividere la retta data* AB *in due parti uguali.*

Da' punti A, e B come centri con un raggio maggiore della metà d' AB, descrivete due archi che si taglino in D, il punto D sarà ugualmente lontano dai punti A e B. Segnate nella stessa maniera al di sopra o al di sotto della linea AB un secondo punto E ugualmente lontano dai punti A e B. Per i due punti D, E tirate la linea DE, dico che DE taglierà la linea AB in due parti uguali al punto C.

Poichè essendo ciascuno de' punti D ed E ugualmente distante dalle estremità A e B, essi devono trovarsi ambedue nella perpendicolare inalzata sul mezzo d' AB. Ma per due punti dati non può passare che una sola linea retta; dunque la linea DE sarà quella stessa perpendicolare che taglia la linea AB in due parti uguali al punto C.

PROBLEMA II.

Fig. 71. *Da un punto* A *dato sulla linea* BC, *alzare una perpendicolare a questa linea.*

Prendete i punti B e C a ugual distanza da A; indi dai punti B e C come centri, e con un raggio maggiore di BA, descrivete due archi che si taglino in D; tirate AD che sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè, essendo il punto D ugualmente lontano da B e da C, esso appartiene alla perpendicolare alzata sul mezzo di BC; dunque AD è questa perpendicolare.

Scolio. La medesima costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un punto dato A sopra una linea data BC.

PROBLEMA III.

Da un punto A *dato fuori della retta* BD *abbassare una perpendicolare sopra questa retta*. Fig. 72.

Dal punto A come centro, e con un raggio abbastanza grande, descrivete un arco che tagli la linea BD nei due punti B e D. Segnate quindi un punto E ugualmente distante dai punti B e D, e tirate AE che sarà la perpendicolare cercata.

Poichè, ciascuno dei due punti A ed E è ugualmente distante dai punti B e D; dunque la linea AE è perpendicolare sul mezzo di BD.

PROBLEMA IV.

Al punto A *della linea* AB *fare un angolo uguale all'angolo dato* K. Fig. 73.

Dalla sommità K come centro, e con un raggio ad arbitrio, descrivete l'arco IL terminato a' due lati dell'angolo. Dal punto A come centro, e con un raggio AB uguale a KI, descrivete l'arco indefinito BO. Prende-

te poi un raggio uguale alla corda LI; dal punto B come centro e con questo raggio descrivete un arco che tagli in D l'arco indefinito BO; tirate AD, e l'angolo DAB sarà uguale all'angolo dato K.

Poichè, i due archi BD, LI hanno raggi uguali, e corde uguali; dunque sono uguali *; dunque l'angolo BAD=IKL.

* Pr. 4. Lib. II.

PROBLEMA V.

Fig. 74. *Dividere un angolo, o un arco dato in due parti uguali.*

1.° Se bisogna dividere l'arco AB in due parti uguali, dai punti A e B come centri, e con uno stesso raggio, descrivete due archi che si taglino in D. Per il punto D e per il centro C tirate CD che taglierà l'arco AB in due parti uguali al punto E.

Poichè, ciascuno dei punti C, e D è ugualmente distante dalle estremità A e B della corda AB; dunque la linea CD è perpendicolare sul mezzo di questa corda; dunque divide l'arco AB in due parti uguali nel punto E *.

* Pr. 6. Lib. II.

2.° Se bisogna dividere in due parti uguali l'angolo ACB, si comincierà da descrivere dalla sommità C come centro l'arco AB, e si procederà nel resto come quì sopra. È chiaro che la linea CD dividerà in due parti uguali l'angolo ACB.

Scolio. Si può colla medesima costruzione dividere ciascuna delle metà AE, EB in due parti uguali; così con delle suddivisioni successive si dividerà un angolo o un arco dato in quattro parti uguali, in otto, in sedici, ec.

PROBLEMA VI.

Per un punto dato A *condurre una parallela alla linea data* BC. Fig 75.

Dal punto A come centro, e con un raggio abbastanza grande, descrivete l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro e col medesimo raggio, descrivete l'arco AF, prendete ED=AF, e tirate AD che sarà la parallela richiesta.

Poichè, tirando AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD sono uguali; dunque le linee AD, EF sono parallele *.

* P. 23. Lib. I.

PROBLEMA VII.

Essendo dati due angoli A *e* B *d'un triangolo, trovare il terzo.*

Tirate la linea indefinita DEF, fate al punto E l'angolo DEG=A, e l'angolo GEH=B: l'angolo restante HEF sarà il terzo angolo richiesto; poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti. Fig. 76.

PROBLEMA VIII.

Essendo dati due lati B *e* C *d'un triangolo, e l'angolo* A *che essi comprendono, descrivere il triangolo.* Fig 77.

Avendo tirato la linea indefinita DE, fate al punto D l'angolo EDF uguale all'angolo dato A; prendete quindi DG=B, DH=C; e tirate GH, DGH sarà il triangolo cercato.

PROBLEMA IX.

Essendo dati un lato e due angoli d'un triangolo, descrivere il triangolo.

I due angoli dati saranno o tutti due adiacenti al lato dato, o uno adiacente e l' altro opposto. In questo ultimo caso, cercate il terzo, e avrete così i due angoli adiacenti. Fig. 78. Posto ciò, tirate la retta DE uguale al lato dato, fate al punto D l' angolo EDF uguale ad uno degli angoli adiacenti, e al punto E l' angolo DEG uguale all' altro; le due linee DF, EG si taglieranno in H, e DEH sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA X.

Essendo dati i tre lati A, B, C *d' un triangolo, descrivere il triangolo.*

Fig. 79. Tirate DE uguale al lato A; dal punto E come centro, e con un raggio uguale al secondo lato B, descrivete un arco; dal punto D come centro, e con un raggio uguale al terzo lato C, descrivete un altro arco che tagli il primo in F; tirate DF, EF, e DEF sarà il triangolo cercato.

Scolio. Se uno dei lati fosse maggiore della somma degli altri due, gli archi non si taglierebbero, e il problema sarebbe impossibile.

PROBLEMA XI.

Essendo dati due lati A *e* B *d' un triangolo, coll' angolo* C *opposto al lato* B, *descrivere il triangolo.*

Fig. 80. Vi sono due casi: 1.° se l' angolo C è retto o ottuso, fate l' angolo EDF uguale all' angolo C; prendete DE=A, dal punto E come centro, e con un raggio uguale al lato dato B, descrivete un arco che tagli in F la

linea DF; tirate EF, e DEF sarà il triangolo richiesto.

Bisogna in questo primo caso che il lato B sia maggiore di A; poichè l'angolo C essendo retto o ottuso, è il maggiore degli angoli del triangolo; dunque il lato opposto dev'essere pure il maggiore.

2.° Se l'angolo C è acuto, e B maggiore di A, ha sempre luogo la medesima costruzione, e DEF è il triangolo cercato. Fig. 81.

Ma se, essendo acuto l'angolo C, il lato B è minore di A, allora l'arco descritto dal centro E col raggio EF=B taglierà il lato DF in due punti F e G, situati dalla medesima parte per rapporto a D; dunque vi saranno due triangoli DEF, DEG, che soddisfaranno ugualmente al problema. Fig. 82.

Scolio. Il problema sarebbe impossibile in tutti i casi, se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata da E sulla linea DF.

PROBLEMA XII.

Essendo dati i lati adiacenti A *e* B *d'un parallelogrammo coll'angolo* C *da essi compreso, descrivere il parallelogrammo*. Fig. 83.

Tirate la linea DE=A, fate al punto D l'angolo FDE=C, prendete DF=B; descrivete due archi, uno dal punto F come centro, e con un raggio FG=DE, l'altro dal punto E come centro, e con un raggio EG=DF: al punto G ove questi due archi si tagliano, tirate FG, EG; e DEFG sarà il parallelogrammo richiesto.

Poichè, per costruzione, i lati opposti so-

no uguali; dunque la figura descritta è un parallelogrammo *, e questo parallelogrammo è formato coi lati dati e l' angolo dato.

*P.31. Lib. I.

Corollario. Se l'angolo dato è retto, la figura sarà un rettangolo; se inoltre i lati sono uguali, sarà un quadrato.

PROBLEMA XIII.

Trovare il centro d' un circolo, o d' un arco dato.

Fig.84. Prendete a piacere nella circonferenza o nell'arco tre punti A, B, C, tirate, o imaginate che si tirino AB, e BC, dividete queste due linee in due parti uguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG; il punto O ove queste perpendicolari s'incontrano sarà il centro cercato.

Scolio. La medesima costruzione serve per far passare una circonferenza per i tre punti dati A, B, C, e parimente a far sì che il triangolo dato ABC sia inscritto in un circolo.

PROBLEMA XIV.

Per un punto dato condurre una tangente a un circolo dato.

Fig.85. Se il punto dato A è sulla circonferenza, tirate il raggio CA, e conducete AD perpendicolare a CA; AD sarà la tangente richiesta.

Fig.86. Se il punto A è fuori del circolo, unite il punto A e il centro colla linea retta CA; dividete CA in due parti uguali nel punto O, dal punto O come centro, e col raggio OC descrivete una circonferenza che taglierà la circonferenza data nel punto B; tirate AB, e AB sarà la tangente cercata.

Poichè, tirando CB, l'angolo CBA inscritto nel mezzo-circolo è un angolo retto *; dunque AB è perpendicolare all'estremità del raggio CB; dunque è tangente.

* P. 18. Lib. II.

Scolio. Essendo il punto A fuori del circolo, si vede che vi sono sempre due tangenti uguali AB, AD che passano per il punto A; esse sono uguali, perchè i triangoli rettangoli CBA, CDA hanno l'ipotenusa CA comune, e il lato CB=CD. Dunquè sono uguali; dunque AD=AB, e nel tempo stesso l'angolo CAD=CAB.

PROBLEMA XV.

Inscrivere un circolo in un triangolo dato ABC.

Fig. 78.

Dividete gli angoli A e B in due parti uguali colle linee AO e BO che s' incontreranno in O; dal punto O abbassate le perpendicolari OD, OE, OF sui tre lati del triangolo: dico che queste perpendicolari saranno uguali fra loro; poichè, per costruzione, l' angolo DAO=OAF, l' angolo retto ADO=AFO; dunque il terzo angolo AOD è uguale al terzo AOF. D'altronde il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato uguale sono uguali; dunque questi due triangoli sono uguali; dunque DO=OF. Si proverà parimente che i due triangoli BOD, BOE sono uguali; dunque OD=OE; dunque le tre perpendicolari OD, OE, OF sono uguali fra loro.

Adesso se dal punto O come centro e col raggio OD si descrive una circonferenza, è

e

chiaro che questa circonferenza sarà inscritta nel triangolo ABC; poichè il lato AB, perpendicolare all' estremità del raggio OD, è una tangente; ed è lo stesso dei lati BC, AC.

PROBLEMA XVI.

Fig. 88. e 89. *Sopra una linea retta* AB, *descrivere un segmento capace dell' angolo dato* C, *cioè un segmento tale che tutti gli angoli che vi sono inscritti siano uguali all' angolo dato* C.

Prolungate AB verso D, fate al punto B l' angolo DBE=C, tirate BO perpendicolare a BE, e GO perpendicolare sul mezzo d' AB; dal punto d' incontro O come centro e col raggio OB descrivete un circolo, il segmento richiesto sarà AMB.

Poichè, l' angolo EBD è uguale al suo opposto ABF; e siccome BF è perpendicolare all' estremità del raggio OB, BF è una tangente, e l' angolo ABF ha per misura la metà dell' arco AKB *, l' angolo AMB ha la medesima misura; dunque l' angolo AMB= EBD=C; dunque tutti gli angoli inscritti nel segmento AMB sono uguali all' angolo dato C.

* P. 19. Lib. II.

Scolio. Se l' angolo dato fosse retto, il segmento cercato sarebbe il mezzo-circolo descritto sul diametro AB.

PROBLEMA XVII.

Fig. 90. *Trovare il rapporto numerico di due linee rette date* AB, CD, *seppure queste due linee hanno fra loro una misura comune*.

Portate la minore CD sulla maggiore AB quante volte può esservi contenuta, per esempio, due volte col resto BE.

Portate il resto BE sulla linea CD quante volte può esservi contenuto, una volta per esempio, col resto DF.

Portate il secondo resto DF sul primo BE quante volte può esservi contenuto, una volta, per esempio, col resto BG.

Portate il terzo resto BG sul secondo DF quante volte può esservi contenuto.

Continuate così finchè abbiate un resto che sia contenuto un numero esatto di volte nel suo precedente.

Allora quest' ultimo resto sarà la comune misura delle linee proposte, e riguardandolo come l' unità, si troveranno facilmente i valori dei resti precedenti, e finalmente i valori delle due linee proposte, donde si conchiuderà il loro rapporto in numeri.

Per esempio, se si trova che GB è contenuto due volte appunto in FD, BG sarà la comun misura delle due linee proposte. Sia $BG=1$, si avrà $FD=2$; ma EB contiene una volta FD più GB; dunque $EB=3$; CD contiene una volta EB più FD; dunque $CD=5$; finalmente AB contiene due volte CD più EB; dunque $AB=13$; dunque il rapporto delle due linee AB, CD è quello di 13 a 5. Se la linea CD fosse presa per unità, la linea AB sarebbe $\frac{13}{5}$, e se la linea AB fosse presa per unità, la linea CD sarebbe $\frac{5}{13}$.

Scolio. Il metodo che si è spiegato è quel medesimo che prescrive l' aritmetica per trovare il comun divisore di due numeri; onde non ha bisogno d' altra dimostrazione.

Può accadere, che per quanto si continui

lungamente l'operazione, non si trovi mai un resto che sia contenuto un numero preciso di volte nel suo precedente. Allora le due linee non hanno misura comune, e si chiamano *incommensurabili*: se ne vedrà in seguito un esempio nel rapporto che vi è fra la diagonale e il lato d'un quadrato. Non si può dunque allora trovare il rapporto esatto in numeri; ma trascurando l'ultimo resto, si troverà un rapporto prossimo, e tanto più prossimo, quanto più lungi sarà stata portata l'operazione.

PROBLEMA XVIII.

Fig 91. *Essendo dati due angoli* A *e* B, *trovare la loro misura comune, se l'hanno, e quindi il loro rapporto in numeri.*

Descrivete con raggi uguali gli archi CD, EF che servono di misura a questi angoli: procedete in seguito, per la comparazione degli archi CD, EF come nel problema precedente; poichè, un arco può portarsi sopra un arco dello stesso raggio come una linea retta sopra una linea retta. Giungerete così alla misura comune degli archi CD, EF, se l'hanno, e al loro rapporto in numeri. Questo rapporto sarà lo stesso di quello degli angoli dati *, e se DO è la misura comune degli archi, DAO sarà quella degli angoli.

* P. 17. Lib. II

Scolio. Si può così trovare il valore assoluto d'un angolo paragonando l'arco che gli serve di misura a tutta la circonferenza: per esempio, se l'arco CD stà alla circonferenza come 3 a 25, l'angolo A sarà $\frac{3}{25}$ di quattro angoli retti, o $\frac{12}{25}$ d'un angolo retto.

Potrà pure accadere che gli archi paragonati non abbiano alcuna misura comune; allora non si avrà per gli angoli che dei rapporti in numeri più o meno prossimi, secondo che l'operazione sarà stata spinta più o meno lungi.

LIBRO TERZO

LE PROPORZIONI DELLE FIGURE

DEFINIZIONI

1. Chiamerò *figure equivalenti* quelle le di cui superfici sono uguali.

Due figure possono essere equivalenti, quantunque siano affatto dissimili; per esempio un circolo può essere equivalente a un quadrato, un triangolo a un rettangolo, ec.

La denominazione di *figure uguali* sarà conservata a quelle che essendo applicate l'una sull'altra coincidono in tutti i loro punti. Tali sono due circoli di cui i raggi siano uguali, due triangoli di cui i tre lati siano respettivamente uguali ec.

2. Due figure sono *simili* quando hanno gli angoli respettivamente uguali e i lati *omologhi* proporzionali. Per lati omologhi s'intendono quelli che hanno la medesima posizio-

ne nelle due figure, o che sono adiacenti ad angoli uguali. Questi angoli stessi si chiamano angoli omologhi.

Due figure uguali sono sempre simili, ma due figure simili possono essere molto disuguali.

3. In due circoli differenti, si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili* quelli che corrispondono ad angoli al centro uguali.

Fig. 92. Così essendo l'angolo A uguale all'angolo O, l'arco BC è simile all'arco DE, il settore ABC al settore ODE, ec.

Fig. 93. 4. L'*altezza* d'un parallelogrammo è la perpendicolare EF condotta fra i due lati o *basi* opposte AB, CD.

Fig. 94. 5. L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare AD abbassata da un angolo A sul lato opposto BC che si chiama la *base*.

Fig. 95. 6. L'*altezza* del trapezio è la perpendicolare EF condotta fra le sue due *basi* parallele AB, CD.

N. B. Per l'intelligenza di questo libro, e dei seguenti, bisogna aver presente la teoria delle proporzioni, per la quale rimandiamo ai trattati ordinarj di aritmetica e di Algebra. Faremo sòlamente un osservazione che è importantissima per fissare il vero senso delle proporzioni, e dissipare ogni oscurità sì nell'enunziato che nelle dimostrazioni.

Se si ha la proporzione A : B : : C : D, si sà che il prodotto degli estremi $A \times D$ è uguale al prodotto de' medi $B \times C$.

Questa verità è incontrastabile in numeri; lo è pure in grandezze di qualunque sorte, purchè si esprimano, o s' imaginino espresse

in numeri; il che si può sempre supporre: per esempio se A, B, C, D sono linee, si può imaginare che una di queste quattro linee, ossivvero una quinta serva di misura comune a tutte e sia presa per unità; allora A, B, C, D rappresentano ciascuna un certo numero d'unità intiero o fratto, commensurabile o incommensurabile; e la proporzione fra le linee A, B, C, D diventa una proporzione di numeri. Il prodotto delle linee A e D, che si chiama ancora il loro *rettangolo*, non è dunque altro che il numero d'unità lineari contenute in A moltiplicato per il numero delle unità lineari contenute in D; e si concepisce facilmente, che questo prodotto può e deve essere uguale a quello che resulta similmente dalle linee B e C.

Le grandezze A e B possono essere d'una specie, per esempio linee, e le grandezze C e D d'un'altra specie, per esempio superfici; allora bisogna riguardare sempre queste grandezze come numeri; A e B si esprimeranno in unità lineari, C e D in unità superficiali, e il prodotto A×D sarà un numero come il prodotto B×C.

In generale, in tutte le operazioni che si faranno sulle proporzioni, bisogna sempre riguardare i termini di queste proporzioni come tanti numeri, ciascuno della specie che gli conviene, e non si durerà alcuna fatica a concepire queste operazioni, e le conseguenze che ne nascono.

Dobbiamo pure avvertire che parecchie delle nostre dimostrazioni sono fondate sopra al-

cune delle regole più semplici dell' algebra, le quali sono fondate esse stesse sugli assiomi cogniti: così se si ha $A=B+C$, e si moltiplichi ogni membro per una stessa quantità M, se ne conchiude $A\times M=B\times M+C\times M$. Parimente, se si ha $A=B+C$, e $D=E-C$, e si aggiungano le quantità uguali, cancellando $+C$ e $-C$ che si distruggono, se ne conchiuderà $A+D=B+E$, e così d'altri casi. Tutto ciò è assai chiaro da per se; ma in caso di difficoltà, sarà bene di consultare i libri d'algebra, e di frammischiare lo studio delle due scienze.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

I parallelogrammi che hanno basi uguali e altezze uguali sono equivalenti.

Fig. 96. Sia AB la base comune de' due parallelogrammi ABCD, ABEF; poichè si suppongono della medesima altezza, le basi superiori DC, FE saranno situate sopra una medesima linea parallela ad AB. Ora per la natura dei parallelogrammi si ha $AD=BC$, e $AF=BE$; per la medesima ragione si ha $DC=AB$, e $FE=AB$; dunque $DC=FE$; dunque togliendo DC e FE dalla medesima linea DE, i resti CE e DF saranno uguali. Da ciò segue, che i triangoli DAF, CBE sono equilateri fra loro e per conseguenza uguali.

Ma se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo ADF, resta il parallelogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si to-

glie il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD. Dunque i due parallelogrammi ABCD, ABEF che hanno la medesima base e la medesima altezza sono equivalenti.

Corollario. Dunque ogni parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF sulla medesima base e della medesima altezza. Fig. 97.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Ogni triangolo ABC *è la metà del parallelogrammo* ABCD *che ha la medesima base e la medesima altezza.* Fig. 98.

Perchè i triangoli ABC, ACD sono uguali*.

Corollario 1. Dunque un triangolo ABC è la metà del rettangolo BCEF che ha la medesima base BC e la medesima altezza AO; poichè il rettangolo BCEF è equivalente al parallelogrammo ABCD.

Corollario 2. Tutti i triangoli che hanno basi uguali, e altezze uguali sono equivalenti.

*P. 30. L. 1.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi. Fig. 99.

Siano ABCD, AEFD due rettangoli che hanno per altezza comune AD; dico che stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

Supponiamo primieramente che le basi AB, AE siano commensurabili fra loro, e che stiano, per esempio, come i numeri 7 e 4: se si divide AB in sette parti uguali, AE conterrà 4 di queste parti; alzate ad ogni punto di divisione una perpendicolare alla base, forme-

rete così sette rettangoli parziali che saranno fra loro uguali, poichè avranno la medesima base e la medesima altezza. Il rettangolo ABCD conterrà sette rettangoli parziali, mentre AEFD ne conterrà quattro. Dunque il rettangolo ABCD sta al rettangolo AEFD come 7 a 4, o come AB sta ad AE. Il medesimo ragionamento può essere applicato ad ogni altro rapporto diverso da quello di 7 a 4: dunque, qualunque sia questo rapporto, purchè sia commensurabile, si avrà

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Fig. 100. Supponiamo in secondo luogo che le basi AB, AE siano incommensurabili fra loro, dico che sarà parimente

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Poichè, se questa proporzione non è vera, restando gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà maggiore o minore di AE. Supponiamo che sia maggiore e che si abbia

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Dividete la linea AB in parti uguali minori di EO, vi sarà almeno un punto di divisione I fra E ed O; per questo punto alzate la perpendicolare IK; le base AB, AI saranno commensurabili fra loro; e così si avrà secondo ciò che si è ora dimostrato

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Ma si ha per supposizione

ABCD : AEFD :: AB : AO.

In queste due proporzioni gli antecedenti sono uguali; dunque i conseguenti sono proporzionali, e ne resulta

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Ma AO è maggiore d'AI: dunque affinchè sussistesse la proporzione, bisognerebbe che il rettangolo AEFD fosse maggiore di AIKD; ora al contrario è minore; dunque la proporzione è impossibile, dunque ABCD non può stare ad AEFD come AB stà ad una linea maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile, si proverebbe che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AE; duuque esso è esattamente AE.

Dunque, qualunque sia il rapporto delle basi, due rettangoli della medesima altezza ABCD, AEFD stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Due rettangoli qualunque ABCD, AEGF *stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per l' altezze, talmente che si ha* ABCD : AEGF :: AB×AD : AE×AF. F. 101.

Prolungate i lati GE, CD finchè s'incontrino in H; i due rettangoli ABCD, AEHD hanno la medesima altezza AD; stanno dunque fra loro come le loro basi AB, AE; parimente i due rettangoli AEHD, AEGF hanno la medesima altezza AE; stanno dunque fra loro come le loro basi AD, AF; onde si avranno le due proporzioni

ABCD : AEHD :: AB : AE,
AEHD : AEGF :: AD : AF.

Moltiplicando per ordine queste proporzioni, e osservando che il medio termine AEHD

può essere omesso come moltiplicatore comune all'antecedente e al conseguente, si avrà

ABCD : AEGF :: AB×AD : AE×AF.

Scolio. Dunque si può prendere per misura d'un rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, purchè s'intenda per questo prodotto quello di due numeri, cioè, il numero d'unità lineari contenute nella base, e il numero d'unità lineari contenute nell'altezza.

Questa misura d'altronde non è assoluta, ma soltanto relativa; suppone che si valuti similmente un altro rettangolo misurando i suoi lati colla stessa unità lineare; si ottiene così un secondo prodotto, e il rapporto dei due prodotti è uguale a quello de' rettangoli, conforme alla proposizione or dimostrata.

Per esempio, se la base del rettangolo A è di tre unità e la sua altezza di dieci, il rettangolo sarà rappresentato dal numero 3×10, o 30, numero che così isolato non significa niente; ma se si ha un secondo rettangolo B la di cui base sia di dodici unità e l'altezza di sette, il secondo rettangolo sarà rappresentato dal numero 7×12, o 84; di quì si conchiuderà che i due rettangoli A e B stanno fra loro come 30 stà a 84; dunque se si convenisse di prendere il rettangolo A per unità di misura nelle superfici, il rettangolo B avrebbe allora per misura assoluta $\frac{84}{30}$, cioè sarebbe uguale a $\frac{84}{30}$ unità superficiali.

È più comune e più semplice il prendere il quadrato per l'unità di superficie, e si

scieglie il quadrato, il di cui lato è l'unità di lunghezza; allora la misura che abbiamo riguardato semplicemente come relativa diventa assoluta: per esempio, il numero 30, col quale abbiamo misurato il rettangolo A, rappresenta 30 unità superficiali, o 30 di quei quadrati il di cui lato è uguale all'unità. Ciò è reso sensibile dalla figura. F. 102.

Si confonde assai spesso in geometria il prodotto di due linee col loro *rettangolo*, e quest'espressione è anche passata nell'aritmetica, ove il prodotto di due numeri si chiama il loro rettangolo, come si chiama *quadrato* il prodotto d'un numero moltiplicato per se stesso.

I quadrati de'numeri 1, 2, 3, ec. sono 1, 4, 9, ec. Così si vede che il quadrato fatto sopra una linea doppia è quadruplo, sopra una linea tripla è nove volte più grande, e così di seguito. F. 103.

N. B. La superficie d'una figura in quanto che vien misurata o comparata ad altre superficì, si chiama pure *l'area* d'una tal figura. Ogni superficie o area equivale a un rettangolo, e si misura col prodotto di due linee.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

L'area d'un parallelogrammo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè il parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF che ha la medesima base AB, e la medesima altezza BE; or questo ha per misura AB×BE. Dunque ec. Fig. 97.

Corollario. Dunque i parallelogrammi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze, e i parallelogrammi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi; poichè, se le basi sono uguali, i prodotti delle basi per l'altezze staranno come le altezze; e se le altezze sono uguali, i prodotti delle basi per l'altezze staranno come le basi.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

L'area d'un triangolo è uguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

F. 104. Poichè, il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo ABCE che ha la medesima base BC e la medesima altezza AD: ora la superficie del parallelogrammo $=BC\times AD$; dunque quella del triangolo $=\frac{1}{2}BC\times AD$, o $BC\times\frac{1}{2}AD$.

Corollario. Dunque due triangoli della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi; e due triangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

F. 105. *L'area del trapezio* ABCD *è uguale alla sua altezza* EF *moltiplicata per la mezza-somma delle basi parallele* AB, CD.

Per il punto I mezzo del lato CB, conducete KL parallela al lato opposto AD, e prolungate DC finchè incontri KL.

Nei triangoli IBL, ICK si ha il lato $IB=IC$ per costruzione, l'angolo $LIB=CIK$, e l'an-

golo IBL=ICK, poichè CK e BL sono paralelle; dunque questi triangoli sono uguali *; dunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL ed ha per misura EF×AL.

* P. 7. L. I.

Ma si ha AL=DK, e poichè il triangolo IBL è uguale al triangolo KCI, il lato BL=CK; dunque AB+CD=AL+DK=2AL, ovvero AL è la mezza-somma delle basi AB, CD: dunque finalmente l'area del trapezio ABCD è uguale all'altezza EF moltiplicata per la mezza-somma delle basi AB, CD, il che si esprime così: $ABCD=EF\times\left(\frac{AB+CD}{2}\right)$

Scolio. Se per il punto I mezzo di BC si conduce IH parallela alla base AB, il punto H sarà pure il mezzo di AD; perchè la figura AHIL è un parallelogrammo, come anche DHIK; si ha dunque AH=IL, e DH=IK; ora IL=IK, poichè i triangoli BIL, CIK sono uguali; dunque AH=DH.

Si può osservare che la linea $HI=AL=\frac{AB+CD}{2}$; dunque l'area del trapezio può esprimersi così EF×HI. Essa è uguale all'altezza del trapezio moltiplicata per la linea che unisce i mezzi dei lati non paralleli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Se una linea AC *è divisa in due parti* AB, BC, *il quadrato fatto sull'intiera linea* AC *conterrà il quadrato fatto sopra* AB, *più il quadrato fatto sopra* BC, *più due volte il rettan-*

F. 106.

golo compreso sotto le due parti AB, *e* BC, *il che si esprime così*, $\overline{AC}^2$ *o* $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

Costruite il quadrato ACDE, prendete AF=AB, conducete FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.

Il quadrato ACDE è diviso in quattro parti: la prima ABIF è il quadrato fatto sopra AB, poichè si è preso AF=AB: la seconda IGDH è il quadrato fat o sopra BC, poichè siccome si ha AC=AE, e AB=AF, la differenza AC—AB è uguale alla differenza AE—AF, cioè BC=EF. Ma a cagione delle parallele, IG=BC, e DG=EF, dunque HIGD è uguale al quadrato fatto sopra BC. Essendo tolte queste due parti dal quadrato totale, restano i due rettangoli BCGI, EFIH che hanno ciascuno per misura AB×BC. Dunque il quadrato fatto sopra AC, ec.

Scolio. Questa proposizione si accorda con quella che si dimostra in algebra per la formazione del quadrato d' un binomio, e che è così espressa: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

PROPOSIZIONE IX.

Fig. 107.

TEOREMA

Se la linea AC *è la differenza di due linee* AB, BC, *il quadrato fatto sopra* AC *conterrà il quadrato* AB *più il quadrato di* BC, *meno due volte il rettangolo fatto sopra* AB *e* BC, *cioè si avrà* $\overline{AC}^2$ *o* $(AB-BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$.

Costruite il quadrato ABIF, prendete AE= AC, conducete CG parallela a BI, HK parallela ad AB, e terminate il quadrato EFLK.

I due rettangoli CBIG, GLKD hanno ciascuno per misura $AB \times BC$: se si tolgono dalla figura intiera ABILKEA che ha per valore $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, è chiaro che resterà il quadrato ACDE; dunque, ec.

Scolio. Questa proposizione combina colla formula d'algebra $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

F. 108.

Il rettangolo fatto sulla somma e la differenza di due linee è uguale alla differenza dei quadrati di queste linee: così si ha $(AB+BC) \times (AB-BC) = \overline{AB}^2-\overline{BC}^2$.

Costruite sopra AB ed AC i quadrati ABIF, ACDE, prolungate AB d'una quantità BK= BC, e terminate il rettangolo AKLE.

La base AK del rettangolo è la somma delle due linee AB, BC; la sua altezza AE è la differenza di queste medesime linee. Dunque il rettangolo $AKLE=(AB+BC)\times(AB-BC)$. Ma questo medesimo rettangolo è composto delle due parti ABHE+BHLK, e la parte BHLK è uguale al rettangolo EDGF, perchè BH=ED, e BK=EF; dunque AKLE= ABHE+EDGF. Or queste due parti formano il quadrato ABIF meno il quadrato DHIG che è il quadrato fatto sopra BC: dunque finalmente $(AC+BC) \times (AC-BC) = \overline{AC}^2-\overline{BC}^2$.

Scolio. Questa proposizione combina colla formula d'algebra $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Il quadrato fatto sull'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati.

F. 109. Sia ABC un triangolo rettangolo in A: avendo formato de' quadrati sopra i tre lati, abbassate dall'angolo retto sopra l'ipotenusa la perpendicolare AD che prolungherete fino in E; tirate quindi le diagonali AF, CH.

L'angolo ABF è composto dell'angolo ABC più l'angolo retto CBF; l'angolo CBH è composto del medesimo angolo ABC più l'angolo retto ABH; dunque l'angolo ABF=HBC. Ma AB=BH come lati d'un medesimo quadrato, e BF=BC per la medesima ragione. Dunque i triangoli ABF, HBC hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali, dunque sono uguali.

Il triangolo ABF è la metà del rettangolo BDEF, (o per più brevità, del rettangolo BE) che ha la medesima base BF, e la medesima altezza BD*. Il triangolo HBC è parimente la metà del quadrato AH, perchè essendo retto l'angolo BAC come pure BAL, AC ed AL non fanno che una sola linea retta parallela ad HB; dunque il triangolo HBC e il quadrato AH che hanno la base comune BH, hanno pure l'altezza comune AB. Dunque il triangolo è la metà del quadrato.

* Pr. 2.

Si è provato che il triangolo ABF è ugua-

le al triangolo HBC; dunque il rettangolo BDEF doppio del triangolo ABF, è equivalente al quadrato AH doppio del triangolo HBC. Si dimostrerà parimente che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI; ma i due rettangoli BDEF, CDEG presi insieme fanno il quadrato BCGF; dunque il quadrato BCGF fatto sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK fatti sugli altri due lati; o in altri termini, $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

Corollario I. Dunque il quadrato d'uno dei due lati dell'angolo retto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro lato, il che si esprime così: $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$.

Corollario II. Sia ABCD un quadrato, AC la sua diagonale; il triangolo ABC è rettangolo ed isoscele; onde si avrà $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AB}^2$. Dunque *il quadrato fatto sulla diagonale* AC *è doppio del quadrato fatto sul lato* AB. F. 118.

Ciò si può dimostrare agli occhi, conducendo per i punti A e C delle parallele a BD, e per i punti B e D delle parallele ad AC: si formerà così il quadrato EFGH che è il quadrato di AC. Or si vede che EFGH contiene otto triangoli uguali, e ABCD quattro: dunque il quadrato EFGH è doppio d'ABCD.

Poichè $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, si ha estraendo la radice quadrata, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$. Dunque *la diagonale d'un quadrato è incommensurabile col suo lato.*

Ciò si spiegherà di più in un altra occasione.

Fig. 109. *Corollario III.* Si è dimostrato che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BDEF; ora, a cagione dell' altezza comune BF, il quadrato BCGF stà al rettangolo BDEF come la base BC alla base BD; dunque

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD.$$

Dunque *il quadrato dell' ipotenusa stà al quadrato d' uno dei lati dell' angolo retto come l' ipotenusa stà al segmento adiacente a questo lato*. Il *segmento* di cui si tratta è la parte dell' ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dall' angolo retto; così BD è il segmento adiacente al lato AB, e DC è il segmento adiacente al lato AC. Si avrebbe similmente

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

Corollario IV. I rettangoli BDEF, DCGE avendo pure la medesima altezza, stanno fra loro come le loro basi BD, DC. Or questi rettangoli sono equivalenti ai quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$; dunque

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

Dunque *i quadrati dei due lati dell' angolo retto stanno fra loro come i segmenti dell' ipotenusa adiacenti a questi lati.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Fig. 110. *In un triangolo* ABC, *se l' angolo* C *è acu-*

to; il quadrato del lato opposto sarà minore della somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo C; *e abbassando la perpendicolare* AD *sopra* BC, *la differenza sarà uguale al doppio del rettangolo* $BC \times CD$; *talmente che si avrà*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Vi sono due casi. 1.° Se la perpendicolare cade dentro del triangolo ABC, si avrà $BD = BC - CD$, e per conseguenza * $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, e osservando che a cagione del triangolo rettangolo ABD, $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, e a cagione del triangolo rettangolo ADC, $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

* P. 9.

2.° Se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC, si avrà $BD = CD - BC$, e per conseguenza $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2CD \times BC$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, se ne conchiuderà medesimamente

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD.$$

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

In un triangolo ABC, *se l'angolo* C *è ottuso, il quadrato del lato opposto* AB *sarà maggiore della* [illegible] *dei quadrati dei lati che comprendono* [illegible] C, *e abbassando* AD *perpendicolare* [illegible] *la differenza sarà*

F. 111.

uguale al doppio del rettangolo BC×CD; *talmente che si avrà*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD.$$

La perpendicolare non può cadere dentro del triangolo; perchè, se cadesse per esempio in E, il triangolo ACE avrebbe a un tempo stesso l'angolo retto E, e l'angolo ottuso C, che è impossibile: dunque cade al di fuori, e si ha BD=BC+CD. Di qui resulta * $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, e facendo le riduzioni come nel teorema precedente, se ne conchiuderà $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

*P. 8.

Scolio. Non v'è che il triangolo rettangolo in cui la somma dei quadrati di due lati sia uguale al quadrato del terzo; poichè, se l'angolo compreso da questi lati è acuto, la somma de' loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto, se è ottuso, sarà minore.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

F. 112. *In un triangolo qualunque* ABC *se si conduca dalla sommità al mezzo della base la linea* AE, *dico che si avrà* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$.

Abbassate la perpendicolare AD sulla base BC, il triangolo AEC darà per il teorema 12.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED.$$

Il triangolo ABE darà per il teorema 13.

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2EB\times BD.$$

Dunque, sommando e osservando che $EB=EC$ si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Corollario. In ogni parallelogrammo la somma de' quadrati de' lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

Poichè, le diagonali AC, BD, si tagliano scambievolmente in due parti uguali al punto E *; onde il triangolo ABC dà

F. 118.

* P. 33. L. I.

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

Il triangolo ADC dà parimente

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2.$$

Sommando membro con membro, e osservando che $BE=DE$, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

Ma $4\overline{AE}^2$ è il quadrato di 2AE o di AC; $4\overline{DE}^2$ è il quadrato di BD; dunque la somma de' quadrati de' lati, ec.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

La linea DE, *condotta parallelamente alla base d'un triangolo* ABC, *divide i lati* AB, AC *proporzionalmente, talmente che si ha* AD : DB : : AE : EC.

F. 1?

Tirate BE e DC, i due triangoli BDE, DEC hanno la medesima base DE; hanno pure la medesima altezza, poichè le sommità B e C sono situate sopra una parallela al-

la base. Dunque questi triangoli sono equivalenti *. *Pr. 2.

I triangoli ADE, BDE, la di cui sommità comune è E, hanno la medesima altezza, e stanno fra loro come le loro basi AD, BD *; onde si ha *Pr. 6

ADE : BDE :: AD : BD.

I triangoli ADE, DEC, la di cui sommità comune è D, hanno pure la medesima altezza, e stanno fra loro come le loro basi; dunque

ADE : DEC :: AE : EC.

Ma il triangolo BDE=DEC, dunque, a motivo del rapporto comune in queste due proporzioni, se ne conchiuderà

AD : DB :: AE : EC.

Corollario I. Di quì resulta *componendo* AD+DB : AD :: AE+EC : AE, o AB : AD :: AC : AE, e così pure AB : BD :: AC : CE.

F. 115. *Corollario II. Se fra due rette* AB, CD *si conducono quante si voglian parallele* AC, EF, GH, BD, ec., *queste rette saranno tagliate proporzionalmente*, e *sarà* AE : CF :: EG : FH :: GB : HD.

Perchè, sia O il punto di concorso delle rette AB, CD; nel triangolo OEF, ove la linea AC è condotta parallela alla base, si avrà OE : AE :: OF : CF, o OE : OF :: AE : CF. Nel triangolo OGH, si avrà similmente OE : EG :: OF : FH, o OE : OF :: EG : FH. Dunque, a cagione del rapporto comune OE : OF, queste due proporzioni danno AE : CF :: EG : FH. Si dimostrerà nello stesso modo che si ha EG : FH :: GB : HD, e

in seguito. Dunque le linee AB, CD sono tagliate proporzionalmente dalle parallele EF, GH, ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

F. 116. *Reciprocamente se i lati* AB, AC *sono tagliati proporzionalmente dalla linea* DE, *talmente che sia* AD : DB :: AE : EC, *dico che la linea* DE *sarà parallela alla base* BC.

Poichè se DE non è parallela a BC, supponiamo che lo sia DO; allora secondo il teorema precedente, si avrà AD : BD :: AO : OC. Ma per ipotesi AD : DB :: AE : EC; dunque si avrebbe AO : OC :: AE : EC, proporzione impossibile, poichè da una parte l'antecedente AE è maggiore dell' antecedente AO, e dall'altra il conseguente EC è minore di OC. Dunque la parallela a BC condotta dal punto D non può differire da DE: dunque DE è questa parallela.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

F. 117. *La linea* AD *che divide in due parti uguali l'angolo* BAC *d' un triangolo, dividerà la base* BC *in due segmenti* BD, DC *proporzionali ai lati adiacenti* AB, AC; *talmente che si avrà* BD : DC :: AB : AC.

Per il punto C conducete CE parallela ad AD fino che incontri BA prolungato.

Nel triangolo BCE la linea AD è parallela alla base CE; onde si ha la proporzione

BD : DC :: AB : AE.

Ma il triangolo ACE è isoscele; perchè, a cagione delle parallele AD, CE, l'angolo ACE=DAC, e l'angolo AEC=BAD*; ora, per supposizione, DAC=BAD; dunque l'angolo ACE=AEC; dunque il lato AE=AC*; e sostituendo AC in vece di AE nella proporzione precedente, si avrà

*P.23. Lib. I.

*P.13. Lib. I.

BD : DC : : AB : AC.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali e sono simili.

Fig. 119. Siano ABC, CDE due triangoli che hanno gli angoli respettivamente uguali, cioè BAC=CDE, ABC=DCE, e ACB=DEC; dico che i lati omologhi, o adiacenti agli angoli uguali saranno proporzionali, talmente che si avrà BC : CE : : AB : CD : : AC : DE.

Situate i lati omologhi BC, CE nella medesima direzione, e prolungate i lati BA, ED finchè s'incontrino in F. Poichè BCE è una linea retta, e che l'angolo BCA=CED, ne segue che AC è parallela a DE. Parimente, poichè l'angolo ABC=DCE, la linea AB è parallela a DC. Dunque la figura ACDF è un parallelogrammo.

Nel triangolo BFE, la linea AC è parallela alla base FE; onde si ha BC : CE : : BA : AF. Invece di AF si può mettere la sua uguale CD, e si avrà

BC : CE : : BA : CD.

Nel medesimo triangolo BFE, se si riguarda BF come la base, CD è una parallela a que-

sta base, e si ha la proporzione BC : CE : : FD : DE. In vece di FD mettendo la sua uguale AC, si avrà

BC : CE : : AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni che contengono il medesimo rapporto BC : CE, si può derivare ancora

AC : DE : : BA : CD.

Dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE hanno i lati omologhi proporzionali: ma secondo la definizione, due figure sono simili quando hanno a un tempo stesso gli angoli respettivamente uguali, e i lati omologhi proporzionali; dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE sono due figure simili.

Corollario. Affinchè due triangoli siano simili basta che abbiano due angoli respettivamente uguali, perchè allora il terzo sarà uguale in ambedue i triangoli, ed essi saranno equiangoli.

Scolio. Osservate che, nei triangoli simili, i lati omologhi sono opposti ad angoli uguali; così essendo l'angolo ACB uguale a DEC, il lato AB è omologo a DC; medesimamente AC è omologo a DE, e BC a CE: essendo riconosciuti i lati omologhi, si formano facilmente le proporzioni

AB : DC : : AC : DE : : BC : CE.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Due triangoli che hanno i lati omologhi proporzionali sono equiangoli, e simili. F. 120.

Supponiamo che si abbia BC : EF : : AB :

DE ⁚ ⁚ AC ⁚ DF, dico che i triangoli ABC, DEF avranno gli angoli uguali, cioè A=D, B=E, C=F.

Fate al punto E l'angolo FEG=B, e al punto F l'angolo EFG=C, il terzo G sarà uguale al terzo A, e i due triangoli ABC, EFG saranno equiangoli. Dunque si avrà per il teorema precedente BC ⁚ EF ⁚ ⁚ AB ⁚ EG; ma per supposizione BC ⁚ EF ⁚ ⁚ AB ⁚ DE, dunque EG=DE. Si avrà ancora per il medesimo teorema BC ⁚ EF ⁚ ⁚ AC ⁚ FG; ora si ha per supposizione BC ⁚ EF ⁚ ⁚ AC ⁚ DF; dunque FG=DF; dunque i triangoli EGF, DEF hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque sono uguali. Ma per costruzione il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli DEF, ABC sono equiangoli e simili.

Scolio I. Si vede da queste due ultime proposizioni che basta, affinchè due triangoli siano simili, o che siano equiangoli, o che i lati omologhi siano proporzionali. Non è lo stesso nelle figure di più di tre lati; perchè cominciando fino da' quadrilateri, si può senza cambiar gli angoli, alterare la proporzione de' lati, o senza alterare i lati cangiare gli angoli: così la proporzionalità dei lati non può essere una conseguenza dell' uguaglianza degli angoli, nè *viceversa*. Si vede, per esempio, che conducendo EF parallela a BC, gli angoli del quadrilatero AEFD sono uguali a quelli del quadrilatero ABCD; ma la proporzione de' lati è differente; del pari, senza cangiare i quattro lati AB, BC, CD, AD,

F. 121.

si può avvicinare o allontanare il punto B dal punto D, il che alterera gli angoli.

Scolio II. Le due proposizioni precedenti, che propriamente ne fanno una sola, unite a quella del quadrato dell' ipotenusa, sono le proposizioni più importanti e più feconde della geometria: bastano quasi esse sole a tutte le applicazioni, e alla risoluzione di tutti i problemi; la ragione si è che tutte le figure possono dividersi in triangoli, e un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Perciò le proprietà generali de' triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutte le figure.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Due triangoli che hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali sono simili. F. 122.

Sia l'angolo A=D, e supponiamo che si abbia AB : DE :: AC : DF; dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

Prendete AG=DE, e conducete GH parallela a BC, l'angolo AGH sarà uguale all'angolo ABC, e il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC; si avrà dunque AB : AG :: AC : AH; ma per supposizione AB : DE :: AC : DF, e per costruzione AG=DE; dunque AH=DF. I due triangoli AGH, DEF hanno dunque un angolo uguale compreso fra lati uguali, e per conseguenza sono uguali. Ora il triangolo AGH è simile ad ABC; dunque DEF è pure simile ad ABC.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Due triangoli che hanno i lati omologhi paralleli, o che gli hanno respettivamente perpendicolari, sono simili.

F. 123. Perchè, 1.° se il lato AB è parallelo a DE, e BC ad EF, l'angolo ABC sarà uguale a DEF *; se di più AC è parallelo a DF, l'angolo ACB sarà uguale a DFE, e così BAC ad EDF; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli; dunque sono simili.

* P. 26. L. II.

Fig. 124. 2.° Sia il lato DE perpendicolare ad AB, e il lato DF ad AC; nel quadrilatero AIDH i due angoli I e H saranno retti; i quattro angoli equivalgono insieme a quattro angoli retti *; dunque i due restanti IAH, IDH equivalgono a due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH equivalgono pure a due angoli retti; dunque l'angolo EDF è uguale a BAC. Parimente se il terzo lato EF è perpendicolare al terzo BC, si dimostrerà che l'angolo DFE=C, e DEF=B. Dunque i due triangoli ABC, DEF, che hanno i lati respettivamente perpendicolari, sono equiangoli e simili.

* P. 29. L. II.

Scolio. Si può osservare che nel caso dei lati paralleli, i lati omologhi sono i lati paralleli, e in quello de' lati perpendicolari, lo sono i lati perpendicolari. Così, in quest'ultimo caso, DE è omologo ad AB, DF ad AC, ed EF a BC.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Le linee AF, AG, *ec. condotte dalla sommità di un triangolo dividono proporzionalmente la base* BC *e la sua parallela* DE, *talmente che si ha* DI : BF :: IK : FG :: KL : GH, *ec.* Fig. 125.

Poichè, siccome DI è parallela a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF, e si ha la proporzione DI : BF :: AI : AF. Parimente essendo IK parallela a FG, si ha AI : AF :: IK : FG. Dunque, a càgione del rapporto comune AI : AF, si avrà DI : BF :: IK : FG. Si troverà similmente IK : FG :: KL : GH, ec. Dunque la linea DE è divisa nei punti I, K, L, come lo è la base BC nei punti F, G, H.

Corollario. Dunque se BC è divisa in parti uguali nei punti F, G, H, la parallela DE sarà divisa parimente in parti uguali nei punti I, K, L.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Se dall'angolo retto A *d'un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare* AD *sull'ipotenusa;* F. 126.

1. *I due triangoli parziali* ABD, ADC, *saranno simili fra loro e al triangolo totale* ABC;

2.° *Ogni lato* AB *o* AC *sarà medio proporzionale fra l'ipoteusa* BC *e il segmento adiacente* BD *o* DC;

3.° *La perpendicolare* AD *sarà media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC.

Poichè, 1.° il triangolo BAD e il triangolo BAC hanno l'angolo comune B; di più l'angolo retto BDA è uguale all'angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell'uno è uguale al terzo C dell'altro. Dunque questi due triangoli sono equiangoli e simili. Si dimostrerà parimenti che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque i tre triangoli sono simili fra loro.

2.° Poichè il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali. Ora il lato BD nel triangolo piccolo è omologo a BA nel grande, perchè sono opposti ad angoli uguali BAD, BCA; l'ipotenusa BA del piccolo è omologa all'ipotenusa BC del grande; dunque si può formare la proporzione BD : BA :: BA : BC. Si avrebbe nella stessa maniera DC : AC :: AC : BC. Dunque 2.° ognuno dei lati AB, AC è medio proporzionale fra l'ipotenusa e il segmento adiacente ad esso lato.

3.° Finalmente la similitudine dei triangoli ABD, ADC, dà paragonando i lati omologhi, BD : AD :: AD : DC. Dunque 3.° la perpendicolare AD è media proporzionale tra i segmenti BD, DC.

Scolio. La proporzione BD : AB :: AB : BC dà uguagliando il prodotto degli estremi a quello de' medi, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Si ha medesimamente $\overline{AC}^2 = DC \times BC$, cioè in altri termini, il quadrato fatto sopra AB è uguale al rettangolo fatto sopra BD e BC, e il quadrato fatto sopra AC è uguale al rettan-

golo fatto sopra DC, e BC. Or di quì resulta che il quadrato di AB unito al quadrato di AC è uguale alla somma di due rettangoli che hanno per altezza comune BC, e per base uno BD, l'altro DC. Questi due rettangoli equivalgono ad un solo che avesse per altezza BC, e per base BD+DC o BC, e che fosse per conseguenza il quadrato di BC. Dunque il quadrato fatto sopra BC è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati AB, AC. Ritorniamo così alla proposizione del quadrato dell'ipotenusa per una strada differentissima da quella che avevamo seguito: d'onde si vede che a parlare propriamente la proporzione del quadrato dell'ipotenusa è una conseguenza della proporzionalità dei lati nei triangoli equiangoli: onde le proposizioni fondamentali della geometria si riducono per così dire a questa sola, che i triangoli equiangoli hanno i loro lati omologhi proporzionali.

Accade spesso, come ne abbiam veduto adesso un esempio, che tirando delle conseguenze d'una o più proposizioni, si ricade su delle proposizioni già dimostrate. In generale ciò che caratterizza particolarmente i teoremi di geometria, ed è una prova invincibile della loro certezza, si è che combinandoli insieme in una maniera qualunque, purchè si ragioni giustamente, si cade sempre sopra resultati esatti. Non avverrebbe così se qualche proposizione fosse falsa o non fosse vera che press'a poco; accaderebbe spesso, che per mezzo della combinazione delle pro-

posizioni fra loro, l'errore si accrescerebbe e diventerebbe sensibile. Si vedono esempi di ciò in tutte le dimostrazioni dove ci serviamo della *riduzione all' assurdo*. Tali dimostrazioni in cui si ha in mira di provare che due quantità sono uguali, consistono a far vedere che se si ammettesse fra esse la minima disuguaglianza, ne risulterebbe per mezzo della serie dei ragionamenti un' assurdità manifesta e palpabile; d' onde si rimane costretti a conchiudere che quelle due quantità sono uguali.

Fig. 127. *Corollario*. Se da un punto A della circonferenza si conducono le due corde AB, AC, all' estremità del diametro BC, il triangolo ABC sarà rettangolo in A *. Dunque 1.° *la perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti del diametro* BD, DC, o, il che torna lo stesso, il quadrato $\overline{AD}^2$ è uguale al rettangolo $BD \times DC$.

* P. 18. Lib. II.

2.° *La corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC *e il segmento adiacente* BD, o, il che torna lo stesso, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Si ha parimente $\overline{AC}^2 = CD \times BC$, dunque $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$; e se si paragona $\overline{AB}^2$ a $\overline{BC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD : BC$; si avrebbe pure $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: DC : BC$. Questi rapporti dei quadrati dei lati, sì fra loro che col quadrato dell' ipotenusa, sono già stati dati nei corollari 3, e 4 della proposizione XI.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Due triangoli che hanno un angolo uguale stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono l'angolo uguale. Così il triangolo ABC *sta al triangolo* ADE, *come il rettangolo* AB×AC *sta al rettangolo* AD×AE. F. 128.

Tirate BE; i due triangoli ABE, ADE la di cui sommità comune è in E hanno la medesima altezza, e stanno fra di loro come le loro basi AB, AD; dunque

ABE : ADE :: AB : AD.

Si ha pure

ABC : ABE :: AC : AE.

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, e omettendo il termine comune ABE, si avrà

ABC : ADE :: AB×AC : AD×AE.

Corollario. Dunque i due triangoli sarebbero equivalenti, se il rettangolo AB×AC fosse uguale al rettangolo AD×AE, o se si avesse AB : AD :: AE : AC.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Sia l'angolo A=D, e l'angolo B=E; primieramente, a cagione degli angoli uguali A e D, i triangoli ABC, DEF stanno fra loro come i rettangoli AB×AC, DE×DF. Si ha di più F. 129.

AB : DE :: AC : DF,

E se si moltiplica questa proporzione termine per termine per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

ne risulterà

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

$$\text{Dunque } ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dunque due triangoli simili ABC, DEF stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, DF, o come i quadrati di due altri lati omologhi qualunque.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e disposti similmente

Fig. 129. Nel poligono ABCDE conducete da uno stesso angolo A le diagonali AC, AD agli altri angoli. Nell'altro poligono FGHIK, conducete similmente dall' angolo F omologo o uguale ad A, le diagonali FH, FI.

Poichè i poligoni sono simili, l'angolo ABC *Def. 2 è uguale al suo omologo FGH*, e di più i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH; talmente che si ha AB : FG :: BC : GH. Da ciò segue che i triangoli ABC, FGH *P. 20. sono simili *; dunque l'angolo BCA è uguale a GHF. Essendo tolti questi angoli uguali dagli angoli uguali BCD, GHI, i resti ACD, FHI saranno uguali. Ma, poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha AC : FH :: BC : GH. D'altronde, a cagione della similitudine de' poligoni BC : GH :: CD : HI;

dunque AC : FH :: CD : HI. Ma si è già veduto che l'angolo ACD=FHI; dunque i triangoli ACD, FHI hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali; dunque sono simili. Si può continuare medesimamente a dimostrare la similitudine dei triangoli seguenti, qualunque fosse il numero dei lati dei poligoni proposti, dunque due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti.

Scolio. La proposizione inversa è ugualmente vera: *se due poligoni sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti, i due poligoni saranno simili.*

Poichè, la similitudine dei triangoli respettivi darà l'angolo ABC=FGH, BCA=GHF, ACD=FHI; dunque BCD=GHI, così pure CDE=HIK, ec. Di più si avrà AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : HI, ec. Dunque i due poligoni hanno gli angoli uguali, e i lati proporzionali; dunque sono simili.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

I contorni o perimetri de' poligoni simili stanno come i lati omologhi, e le loro superfici come i quadrati dei lati omologhi.

Poichè, giacchè si ha per la natura delle figure simili, AB : FG :: BC : GH :: CD : HI, ec., si può conchiudere da questa serie di rapporti uguali: la somma degli antecedenti AB+BC+CD, ec. contorno della prima figura stà alla somma de' conseguenti FG+GH+HI, ec. contorno della seconda fi- F. 149.

gura, come un solo lato AB stà al suo omologo FG.

2.° Poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha * $ABC : FGH :: \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; parimente, essendo simili i triangoli ACD, FHI,

*P. 26.

si ha $ACD : FHI :: \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; dunque, a motivo del rapporto comune $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$, si ha

$ABC : FGH :: ACD : FHI.$

Con un ragionamento simile si troverebbe

$ACD : FHI :: ADE : FIK.$

E così in seguito se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti uguali si conchiuderà: La somma degli antecedenti ABC+ACD+ADE o il poligono ABCDE stà alla somma dei conseguenti, o al poligono FGHIK come un antecedente ABC sta al suo conseguente FGH, o come $\overline{AB}^2$ sta a $\overline{FG}^2$; dunque i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Corollario. Se si costruiscono tre figure simili i di cui lati omologhi siano uguali ai tre lati d'un triangolo rettangolo, la figura fatta sul maggior lato sarà uguale alla somma delle altre due. Poichè queste tre figure sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi; ora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA

F. 130. *Le parti di due corde* AB, CD *che si ta-*

gliano in un circolo sono reciprocamente proporzionali; cioè si ha

AO : DO : : CO : OB

Tirate AC e BD: nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono uguali, l'angolo A è uguale all'angolo D perchè sono inscritti nel medesimo segmento *; per la medesima ragione l'angolo $C = B$; dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione

* P.18. Lib. II.

AO : DO : : CO : OB.

Corollario. Dunque $AO \times OB = DO \times CO$; dunque il rettangolo delle due parti d'una delle corde è uguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

Se da uno stesso punto O preso fuori del cerchio, si conducono le seganti OB, OC, terminate all' arco concavo BC, le seganti intiere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne; cioè si avrà

F. 131.

OB : OC : : OD : OA.

Poichè, tirando AC, BD, i triangoli OAC, OBD hanno l'angolo O comune; di più, l'angolo $B = C$ *; dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione

* P.18. Lib. II.

OB : OC : : OD : OA.

Corollario. Dunque il rettangolo $OA \times OB$ è uguale al rettangolo $OC \times OD$.

Scolio. Si può osservare che questa proporzione ha molta analogia colla precedente, e

che ne differisce soltanto perchè le due corde AB, CD in vece di tagliarsi nel cerchio, si tagliano al di fuori. La proposizione seguente può ancora esser riguardata come un caso particolare di questa.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA

Fig. 132. *Se da uno stesso punto O preso fuori del circolo si conduce la tangente OA, e la segante OC, la tangente sarà media proporzionale fra la segante e la sua parte esterna; talmente che si avrà* OC : OA : : OA : OD; *o, il che torna lo stesso,* $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Poichè, tirando AD e AC, i triangoli OAD, OAC hanno l'angolo O comune; di più l'angolo OAD formato da una tangente e da una corda * ha per misura la metà dell'arco AD, e l'angolo C ha la medesima misura; dunque l'angolo OAD=C; dunque i due triangoli sono simili e si ha la proporzione OC : OA : : OA : OD che da $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

* P. 19. L. II.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA

In un triangolo ABC *se si divide l'angolo* A *in due parti uguali colla linea* AD, *il rettangolo dei lati* AB, AC *sarà uguale al rettangolo dei segmenti* BD, DC, *più il quadrato della segante* AD.

Fig. 133.

Fate passare una circonferenza per i tre punti A, B, C, prolungate AD fino alla circonferenza, e tirate CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per supposizione, l'angolo $BAD = EAC$; di più l'angolo $B = E$, avendo ambedue per misura la metà dell'arco AC: dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione $BA : AE :: AD : AC$. Quindi resulta: $BA \times AC = AE \times AD$; ma $AE = AD + DE$, e moltiplicando da ambe le parti per AD, si ha $AE \times AD = \overline{AD}^2 + AD \times DE$; d'altronde $AD \times DE = BD \times DC$*; dunque finalmente

* P. 28.

$$BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA

In un triangolo ABC, *il rettangolo dei due lati* AB, AC *è uguale al rettangolo compreso dal diametro* CE *del circolo circoscritto, e dalla perpendicolare* AD *abbassata sul terzo lato* BC.

F. 134.

Poichè, tirando AE, i triangoli ABD, AEC sono rettangoli, l'uno in D, l'altro in A; di più l'angolo $B = E$; dunque questi triangoli sono simili; e danno la proporzione $AB : CE :: AD : AC$; donde resulta $AB \times AC = CE \times AD$.

Corollario. Se si moltiplicano queste quantità uguali per la medesima quantità BC, si avrà $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Ora $AD \times BC$ è il doppio della superficie del triangolo*; dunque *il prodotto dei tre lati d'un triangolo è uguale alla sua superficie moltiplicata per il doppio del diametro del circolo circoscritto*.

* Pr. 6.

Il prodotto di tre linee si chiama talora un *solido*, per una ragione che si vedrà in seguito. Il suo valore si concepisce facilmente, imaginando che le linee siano ridotte in numeri, e moltiplicando i numeri di cui si tratta.

Scolio. Si può dimostrar pure che *la superficie d'un triangolo è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo inscritto*.

F. 87. Poichè, i triangoli AOB, BOC, AOC che hanno la loro sommità comune in O, hanno per altezza comune il raggio del circolo inscritto; dunque la somma di questi triangoli sarà uguale alla somma delle basi AB, BC, AC moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque il triangolo ABC è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo inscritto.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA

F. 136. *In ogni quadrilatero inscritto* ABCD, *il rettangolo delle due diagonali* AC, BD *è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti, talmente che si ha*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Prendete l'arco CO=AD, e tirate BO che incontra la diagonale AC in I.

L'angolo ABD=CBI, poichè l'uno ha per misura la metà di AD, e l'altro la metà di CO uguale ad AD. L'angolo ADB=BCI, perchè sono inscritti nel medesimo segmento AOB; dunque il triangolo ABD è simile al

triangolo IBC, e si ha la proporzione AD : CI : : BD : BC; donde resulta $AD \times BC = CI \times BD$. Dico adesso che il triangolo ABI è simile al triangolo BDC; perchè essendo l'arco AD uguale a CO, se si aggiunge da ambe le parti OD, si avrà l'arco $AO = DC$; dunque l'angolo $ABI = DBC$; di più l'angolo $BAI = BDC$ essendo inscritti nel medesimo segmento, dunque i triangoli ABI, DBC sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione AB : BD : : AI : CD, donde resulta $AB \times CD = AI \times BD$.

Aggiungendo i due resultati trovati, e osservando che $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) BD = AC \times BD$, si avrà $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Scolio. Si può dimostrare nella stessa maniera un altro teorema sul quadrilatero inscritto. Il triangolo ABD simile a BIC dà pure la proporzione BD : BC : : AB : BI, donde resulta $BI \times BD = BC \times AB$. Se si tira CO, il triangolo ICO simili ad ABI sarà simile a BDC, e darà la proporzione BD : CO : : DC : OI; donde resulta $OI \times BD = CO \times DC$; o a cagione di $CO = AD$, $OI \times BD = AD \times DC$; aggiungendo i due resultati, e osservando che $BI \times BD + OI \times BD$ si riduce a $BO \times BD$, si avrà

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC.$$

Se si fosse preso $BP = AD$, e si fosse tirato CKP si avrebbe trovato con dei ragionamenti simili

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Ma essendo l'arco BP uguale a CO, se si

aggiunge BC ad ambedue, si avrà l'arco CBP=BCO; dunque la corda CP è uguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli BO×BD e CP×CA stanno fra loro come BD stà a CA; dunque

BD : CA :: AB×BC+AD×DC : AD×AB+BC×CD.

Dunque *le due diagonali d'un quadrilatero inscritto stanno fra loro come la somma dei rettangoli dei lati adiacenti alle loro estremità.*

Questi due teoremi possono servire per trovare le diagonali quando si conoscono i lati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA

F. 136. *Sia* P *un punto dato dentro il circolo sul raggio* AC, *e sia preso un punto* Q *al di fuori sul prolungamento dello stesso raggio, talmente che si abbia* CP : CA :: CA : CQ; *se da un punto qualunque* M *della circonferenza si conducono ai due punti* P *e* Q *le rette* MP, MQ, *dico che queste rette staranno per tutto nel medesimo rapporto, e che si avrà* MP : MQ :: AP : AQ.

Poichè si ha per supposizione CP : CA :: CA : CQ; mettendo CM in vece di CA, si avrà CP : CM :: CM : CQ; dunque i triangoli CPM, CQM hanno un angolo uguale C compreso fra lati proporzionali *; dunque sono simili; dunque il terzo lato MP sta al terzo MQ come CP stà a CM o CA. Ma la proporzione CP : CA :: CA : CQ dà, *dividendo*, CP : CA :: CA−CP : CQ−CA, o CP : CA :: AP : AQ, dunque MP : MQ :: AP : AQ.

* P. 20. L. III.

PROBLEMI ANNESSI AL LIBRO TERZO.

PROBLEMA I.

Dividere una linea retta data in quante parti uguali si vuole, o in parti proporzionali a delle linee date.

1.° Sia proposto di dividere la linea AB in cinque parti uguali; per l'estremità A si condurrà l'indefinita AG, e prendendo AC d'una grandezza qualunque, si porterà AC cinque volte sopra AG. Si unirà l'ultimo punto di divisione G e l'estremità B colla linea GB, poi si condurrà CI parallela a GB; dico che AI sarà la quinta parte della linea AB, e che portando AI cinque volte sopra AB, la linea AB sarà divisa in cinque parti uguali. F. 137.

Poichè, siccome CI è parallela a GB, i lati AG, AB sono tagliati proporzionalmenmente in C ed I. Ma AC è la quinta parte di AG; dunque AI è la quinta parte di AB.

2.° Sia proposto di dividere la linea AB in parti proporzionali alle linee date P, Q, R. Dall'estremità A si tirerà l'indefinita AG, si prenderà AC=P, CD=Q, DE=R, si uniranno l'estremità E e B, e per i punti C e D si condurranno CI, DK parallele ad EB; dico che la linea AB sarà divisa in parti AI IK, KB proporzionali alle linee date P, Q, R. F. 138.

Poichè, a motivo delle parallele CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB sono proporzionali alle parti AC, CD, DE *; e per costruzione queste sono uguali alle linee date P, Q, R.

* P. 15.

PROBLEMA II.

Trovare una quarta proporzionale a tre linee date A, B, C.

Fig. 139. Tirate le due linee indefinite DE, DF sotto un angolo qualunque. Sopra DE prendete DA=A e DB=B, sopra DF prendete DC uguale alla terza linea data C, tirate AC, e per il punto B conducete BX parallela ad AC; dico che DX sarà la quarta proporzionale cercata. Poichè, siccome BX è parallela ad AC, si ha la proporzione DA : DB :: DC : DX; ora i tre primi termini di questa proporzione sono uguali alle tre linee date; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta.

Corollario. Si troverà similmente una terza proporzionale alle due linee date A, B, poichè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre linee A, B, B.

PROBLEMA III.

Trovare una media proporzionale fra due linee date A *e* B.

Fig. 140. Sopra una linea indefinita DF, prendete DE=A, ed EF=B; sopra la linea totale DF come diametro descrivete la mezza-circonferenza DGF; al punto E alzate sul diametro la perpendicolare EG, che incontri la circonferenza in G; dico che EG sarà la media proporzionale richiesta.

Poichè, la perpendicolare GE abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del

diametro DE, EF *: or questi segmenti sono uguali alle linee date A e B. * P.23.

PROBLEMA IV.

Dividere la linea data AB *in due parti, in maniera che la maggiore sia media proporzionale tra la linea intiera e l' altra parte.* F. 141.

All' estremità B della linea AB alzate la perpendicolare BC uguale alla metà di AB; dal punto C come centro, e col raggio CB descrivete una circonferenza; tirate AC che taglierà la circonferenza in D, e prendete AF=AD; dico che la linea AB sarà divisa nel punto F nella maniera richiesta, cioè in guisa tale che starà AB : AF : : AF : FB.

Poichè, essendo AB perpendicolare all' estremità del raggio CB, essa è una tangente; e se si prolunga AC finchè incontri di nuovo la circonferenza in E, si avrà * AE : AB : : AB : AD; dunque, *dividendo* AE-AB : AB : : AB-AD : AD. Ma poichè il raggio BC è la metà di AB, il diametro DE è uguale ad AB, e per conseguenza AE—AD=AD =AF; si ha pure a motivo di AF=AD, AB—AD=FB; dunque AF : AB : : FB : AD o AF; dunque, *invertendo*, AB : AF : : AF : FB. * P.30.

Scolio. Questo modo di divisione della linea AB si chiama divisione in *estrema e media ragione*. Se ne vedranno degli usi. Si può osservare che la segante AE è divisa in *estrema e media ragione* nel punto A; poichè AE : DE : : DE : AD.

PROBLEMA V.

F. 142. *Per un punto A dato dentro l' angolo dato BCD tirare la linea BD, in maniera che le parti AB, AD comprese tra il punto A e i due lati dell' angolo, siano uguali.*

Per il punto A conducete AE parallela a CD, prendete BE=CE, e per i punti B ed A tirate BAD che sarà la linea cercata.

Poichè essendo AE parallela a CD, si ha BE : EC : : BA : AD. Ora BE=EC, dunque BA=AD.

PROBLEMA VI.

F. 143. *Fare un quadrato equivalente a un parallelogrammo o a un triangolo dato.*

1.° Sia ABCD il parallelogrammo dato, AB la sua base, DE la sua altezza. Fra AB e DE cercate una media proporzionale XY; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al parallelogrammo ABCD. Poichè, per costruzione, AB : XY : : XY : DE; dunque $\overline{XY}^2=AB\times DE$. Ora $AB\times DE$ è la misura del parallelogrammo, e $\overline{XY}^2$ quella del quadrato; dunque sono equivalenti.

F. 144. 2. Sia ABC il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza. Prendete una media proporzionale fra BC e la metà di AD, e sia XY questa media: dico che il quadradrato fatto sopra XY sarà equivalente al triangolo ABC.

Poichè, siccome si ha BC : XY : : XY : $\frac{1}{2}$ AD, ne risulta $\overline{XY}^2=BC\times\frac{1}{2}AD$; dunque il

quadrato fatto sopra XY è equivalente al triangolo ABC.

PROBLEMA VII.

Fare sulla linea data AD *un rettangolo* ADEX *equivalente al rettangolo dato* ABFC. F. 145.

Cercate una quarta proporzionale alle tre linee AD, AB, AC, e sia AX questa quarta proporzionale; dico che il rettangolo fatto sopra AD e AX sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Poichè, siccome si ha AD : AB : : AC : AX, ne risulta AD×AX=AX×AC; dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

PROBLEMA VIII.

Trovare in linee il rapporto del rettangolo delle due linee date A *e* B *al rettangolo delle due linee date* C *e* D. F. 148.

Sia X una quarta proporzionale alle tre linee B, C, D; dico che il rapporto delle due linee A e X sarà uguale a quello de' due rettangoli A×B, C×D.

Poichè, siccome si ha B : C : : D : X, ne risulta C×D=B×X; dunque A×B : C×D : : A×B : B×X : : A : X.

Corollario. Dunque, per avere il rapporto dei quadrati fatti sopra le linee date A e C, cercate una terza proporzionale X alle linee A e C, talmente che si abbia A : C : : C : X, e voi avrete $A^2 : C^2 : : A : X$.

PROBLEMA IX.

Fig. 145. *Trovare in linee il rapporto del prodotto delle tre linee date A, B, C, al prodotto delle tre linee date P, Q, R.*

Alle tre linee date P, A, B, cercate una quarta proporzionale X; alle tre linee date C, Q, R cercate una quarta proporzionale Y. Le due linee X, Y staranno fra loro come i prodotti $A\times B\times C$, $P\times Q\times R$.

Poichè, siccome $P : A :: B : X$, si ha $A\times B = P\times X$; e moltiplicando da ambe le parti per C, $A\times B\times C = C\times P\times X$. Parimente, siccome $C : Q :: R : Y$, ne resulta $Q\times R = C\times Y$; e moltiplicando da ambe le parti per P, si ha $P\times Q\times R = P\times C\times Y$; dunque il prodotto $A\times B\times C$ stà al prodotto $P\times Q\times R$ come $C\times P\times X$ stà a $P\times C\times Y$, o come X stà a Y.

PROBLEMA X.

Fig. 146. *Cangiare un poligono dato in un triangolo equivalente.*

Sia ABCDE il poligono dato. Tirate primieramente la diagonale CE che recide il triangolo CDE; per il punto D conducete DF parallela a CE finchè incontri AE prolungato, tirate CF, e il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF che ha un lato di meno.

Poichè, i triangoli CDE, CFE hanno la base comune CE; essi hanno pure la medesima altezza, poichè le loro sommità D, F sono sopra una linea DF parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti. Ag-

giungiamo ad ambedue la figura ABCE, si avrà da una parte il poligono ABCDE, e dall' altra il poligono ABCF che saranno equivalenti.

Si può parimente recidere l'angolo B sostituendo al triangolo ABC il triangolo equivalente AGC, e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso metodo si applicherà ad ogni altra figura; poichè, diminuendo ad uno per volta il numero dei lati, si terminerà col trovare il triangolo equivalente.

Corollario. E poichè ogni triangolo può esser cangiato in un quadrato equivalente, ne segue che si troverà sempre un quadrato equivalente a una figura rettilinea data. Ciò si chiama *quadrare* la figura rettilinea, o trovarne la *quadratura*.

Il problema della *quadratura del circolo* consiste a trovare un quadrato equivalente a un circolo di cui è dato il diametro.

PROBLEMA XI.

Fare un quadrato che sia uguale alla somma, o alla differenza di due quadrati dati.

Siano A e B i lati dei quadrati dati. F. 147.

1. Se bisogna trovare un quadrato uguale alla somma di questi quadrati, tirate le due linee indefinite ED, EF ad angolo retto, prendete ED=A, ed EG=B, tirate DG, e DG sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè, essendo il triangolo DEG rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED e EG.

2.° Se bisogna trovare un quadrato uguale alla differenza di questi quadrati, formate parimente l'angolo retto FEH, prendete GE uguale al minore dei lati A e B; dal punto G come centro e con un raggio GH uguale all'altro lato, descrivete un arco che tagli EH in H; dico che il quadrato fatto sopra EH sarà uguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le linee A e B.

Poichè, il triangolo GEH è rettangolo, l'ipotenusa GH=A, e il lato GE=B; dunque il quadrato fatto sopra EH, ec.

Scolio. Si può trovare ancora un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; poichè siccome se ne riducono due a un solo, se ne ridurranno tre a due, e questi due ad uno, e così degli altri.

PROBLEMA XII.

F. 150. *Costruire un quadrato che stia al quadrato dato* ABCD, *come la linea* M *stà alla linea* N.

Sopra la linea indefinita EG prendete EF =M, e FG=N; sopra EG come diametro descrivete una mezza circonferenza, e al punto F alzate sul diametro la perpendicolare FH. Dal punto H conducete le corde HG, HE che prolungherete indefinitamente; sulla prima prendete HK uguale al lato AB del quadrato dato, e per il punto K conducete KI parallela ad EG; dico che HI sarà il lato del quadrato richiesto.

Poichè, a motivo delle parallele KI, GE, si ha $HI : HK :: HE : HG$, o $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 ::$

$\overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$; ma nel triangolo rettangolo EHG*, il quadrato di HE stà al quadrato di HG come il segmento EF stà al segmento FG, o come M stà ad N; dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N$. Ma HK=AB; dunque il quadrato fatto sopra HI stà al quadrato fatto sopra AB come M stà a N.

*P.23. L. I.

PROBLEMA XIII.

Sul lato FG *omologo ad* AB, *descrivere un poligono simile al poligono* ABCDE.

F. 129.

Nel poligono dato tirate le diagonali AC, AD. Al punto F fate l'angolo GFH=BAC, e al punto G l'angolo FGH=ABC; le linee FH, GH si taglieranno in H, e FGH sarà un triangolo simile ad ABC: parimente, sopra FH omologo ad AC descrivete il triangolo FIH simile ad ADC, e sopra FI omologo ad AD descrivete il triangolo FIK simile ad ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto, simile ad ABCDE.

Poichè, questi due poligoni sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili e similmente posti *.

* P.26.

PROBLEMA XIV.

Essendo date due figure simili, costruire una figura simile uguale alla loro somma o alla loro differenza.

Siano A e B due lati omologhi delle figure date; cercate un quadrato uguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra A e B; sia X il lato di questo quadrato, X sarà nella figura cercata il lato omologo ad

A e B nelle figure date. Si costruirà in seguito questa figura per il teorema precedente.

Poichè, le figure simili stanno come i quadrati dei lati omologhi; ora il quadrato del lato X è uguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sui lati omologhi A e B; dunque la figura fatta sul lato X è uguale alla somma o alla differenza delle figure simili fatte sui lati A e B.

PROBLEMA XV.

Costruire una figura simile a una figura data, e che stia a questa figura nel rapporto dato di M *ad* N.

Sia A un lato della figura data, X il lato omologo nella figura cercata, bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato d'A come M stà a N. Si troverà dunque X per il problema 12, conoscendo X, si compirà il resto per il problema 13.

PROBLEMA XVI.

Fig. 151. *Costruire una figura simile alla figura* P *ed equivalente alla figura* Q.

Cercate il lato M del quadrato equivalente alla figura P, e il lato N del quadrato equivalente alla figura Q. Sia quindi X una quarta proporzionale alla tre linee date M, N, AB; sul lato X omologo ad AB descrivete una figura simile alla figura P; dico che sarà ancora equivalente alla figura Q.

Poichè, chiamando Y la figura fatta sul lato X, si avrà, $P : Y :: \overline{AB}^2 : \overline{X}^2$; ma per co-

struzione AB : X :: M : N, o $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; dunque P : Y :: $M^2 : N^2$; ma si ha pure per costruzione $M^2 = P$, e $N^2 = Q$; dunque P : Y :: P : Q; dunque Y=Q; dunque la figura Y è simile alla figura P ed equivalente alla figura Q.

PROBLEMA XVII.

Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato dato C, e i di cui lati adiacenti facciano una somma data AB. F. 152.

Sopra AB come diametro descrivete una mezza-circonferenza; conducete parallelamente al diametro la linea DE ad una distanza AD uguale al lato del quadrato dato C.

Dal punto E, ove la parallela taglia la circonferenza, abbassate sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF, e FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Poichè, la loro somma è uguale ad AB, e il loro rettangolo AF×FB è uguale al quadrato di EF * o al quadrato di AD; dunque questo rettangolo è equivalente al quadrato dato C.

* P. 23.

Scolio. Bisogna, affinchè il problema sia possibile, che la distanza AD non superi il raggio, o che il lato del quadrato C non superi la metà della linea AB.

PROBLEMA XVIII.

Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato C; e i di cui lati adiacenti abbiano fra loro la differenza data AB. F. 153.

Sulla linea data AB, come diametro, de-

scrivete una circonferenza: all' estremità del diametro conducete la perpendicolare o tangente AD uguale al lato del quadrato C. Per il punto D e il centro O tirate la segante DE; dico che DE e DF saranno i lati adiacenti del rettangolo richiesto.

Poichè, 1.° la differenza di questi lati è uguale al diametro EF o AB; 2.° il rettangolo

* P.30. $DE \times DF$ è uguale ad $\overline{AD}^2$ *; dunque il rettangolo sarà equivalente al quadrato dato C.

PROBLEMA XIX.

F. 154. *Trovare la misura comune, se ve n' è alcuna, tra la diagonale e il lato del quadrato.*

Sia ABCG un quadrato qualunque, AC la sua diagonale.

Bisogna primieramente portare CB sopra CA quante volte può esservi contenuto, e perciò sia descritto col centro C e col raggio CB il mezzo-circolo DBE; si vede che CB è contenuto una volta in AC col resto AD; il resultato della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto AD, che bisogna paragonare con CB, o il suo uguale AB.

Si può prendere AF=AD, e portare realmente AF sopra AB, si troverebbe che vi è contenuto due volte con un resto; ma siccome questo resto e i seguenti vanno diminuendo, e ben presto ci sfuggirebbero per la loro piccolezza, questo non sarebbe che un mezzo meccanico imperfetto donde non si potrebbe concludere niente per decidere se le linee AC, CB hanno fra loro o non hanno una mi-

sura comune; or v'è un mezzo semplicissimo di scansare le linee decrescenti, e di operare soltanto sopra linee che restino sempre della medesima grandezza.

In fatti, essendo l'angolo ABC retto, AB è una tangente ed AE una segante condotta dal medesimo punto; talmente che si ha AD : AB :: AB : AE. Onde nella seconda operazione, che consiste a paragonare AD con AB, si può, in vece del rapporto di AD ad AB sostituire quello di AB ad AE; ora AB o la sua uguale CD è contenuta due volte in AE col resto AD; dunque il resultato della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD che bisogna paragonare ad AB.

La terza operazione, che consiste a paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB con AE, e si avrà del pari 2 per quoziente, e AD per resto.

Di quì resulta che l' operazione non avrà fine, e che perciò non v'è alcuna misura comune fra la diagonale e il lato del quadrato; verità che era già cognita per mezzo dell'aritmetica (giacchè queste due linee stanno fra loro :: $\sqrt{2}$: 1), ma che acquista un maggior grado di chiarezza colla risoluzione geometrica.

Scolio. Non è dunque possibile di trovare il rapporto esatto in numeri della diagonale al lato del quadrato; ma si può accostarvisi quanto si vorrà col mezzo della frazion continua che è uguale a questo rapporto. La prima operazione ha dato per quoziente 1; la seconda

e tutte le altre all' infinito danno 2; onde la frazione di cui si tratta è $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$, ec. all' infinito.

Per esempio, se si calcola questa frazione fino al quarto termine inclusivamente, si trova che il suo valore è $1\frac{12}{29}$, o $\frac{41}{29}$; talmente che il rapporto approssimato della diagonale al lato del quadrato è :: 41 : 29. Si troverebbe un rapporto più prossimo calcolando un maggior numero di termini.

LIBRO QUARTO

I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CIRCOLO.

DEFINIZIONE

Un poligono che è nel tempo stesso equiangolo ed equilatero si chiama *poligono regolare*.

Il triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati, e il quadrato quello di quattro.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

F. 155. *Due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono due figure simili.*

Siano per esempio i due esagoni regolari ABCDEF, *abcdef*; la somma degli angoli è la stessa nell' una e nell' altra figura; essa è uguale ad otto angoli retti *. L' angolo A è la sesta parte di questa somma ugualmente che l' angolo *a*; dunque i due angoli A e *a* sono uguali; è lo stesso per conseguenza degli angoli B e *b*, C e *c*, ec.

* P. 29. Lib. I.

Di più, poichè per la natura di questi poligoni i lati AB, BC, CD, ec. sono uguali, come pure *ab*, *bc*, *cd*, ec., è chiaro che si hanno le proporzioni AB : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd*, ec.; dunque le due figure di cui si tratta hanno gli angoli uguali e i lati omologhi proporzionali; dunque sono simili *.

* Def. 2. L. III.

Corollario. Dunque i perimetri di due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superfici come i quadrati di questi lati *.

* P. 27. L. III.

Scolio. L' angolo d' un poligono regolare si determina per mezzo del numero dei suoi lati come quello d' un poligono equiangolo. *Vedete la prop. 29. lib. I.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Ogni poligono regolare può essere inscritto e circoscritto al circolo.

Sia ABCDE, ec. il poligono di cui si tratta; imaginate che si faccia passare una circonferenza per i tre punti A, B, C; sia O il suo centro, e OP la perpendicolare abbassata sul mezzo del lato BC; tirate AO e OD.

F. 156.

Il quadrilatero OPCD e il quadrilatero

OPBA possono essere sopraposti: in fatti, il lato OP è comune, l'angolo OPC=OPB, poichè sono retti; dunque il lato PC si applicherà sul suo uguale PB, e il punto C cadrà in B. Di più, per la natura del poligono, l'angolo PCD=PBA; dunque CD prenderà la direzione BA, e poichè CD=AB, il punto D cadrà in A, e i due quadrilateri coincideranno intieramente l'uno coll'altro. La distanza OD è dunque uguale ad AO, e per conseguenza la circonferenza che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche per il punto D; ma, con un ragionamento simile, si proverà che la circonferenza che passa per i tre punti B, C, D passa per il punto seguente E, e così di seguito: dunque la medesima circonferenza che passa per i punti A, B, C passa per tutti gli angoli del poligono, e il poligono è inscritto in questa circonferenza.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferenza, tutti i lati AB, BC, CD ec. sono corde uguali: esse sono dunque ugualmente distanti dal centro *; dunque se dal punto O come centro e col raggio OP si descrive una circonferenza, questa circonferenza toccherà il lato BC e tutti gli altri lati del poligono nel loro mezzo, e la circonferenza sarà inscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza.

*P. 8. Lib.II.

Scolio I. Il punto O centro comune del circolo inscritto e del circolo circoscritto, può esser riguardato pure come il centro del poligono, e per questa ragione si chiama *angolo al centro* l'angolo AOB formato dai due raggi condotti al-

e estremità d'un medesimo lato AB. Poichè tutte le corde AB, BC, ec. sono uguali, è chiaro che tutti gli angoli al centro sono uguali, e che perciò il valore di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti per il numero dei lati del poligono.

Scolio II. Per inscrivere un poligono regolare d'un certo numero di lati in una circonferenza data, si tratta soltanto di dividere la circonferenza in tante parti uguali quanti lati deve avere il poligono, poichè, essendo uguali gli archi, le corde AB, BC, CD, ec. saranno uguali; i triangoli ABO, BOC, COD, ec. saranno pure uguali, perchè sono equilateri fra loro; dunque tutti gli angoli ABC, BCD, CDE, ec. saranno uguali; dunque la figura ABCDE ec. è un poligono regolare. F. 158.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Inscrivere un quadrato in una circonferenza data. F. 157.

Tirate due diametri AC, BD che si taglino ad angoli retti; unite le estremità A, B, C, D, e la figura ABCD sarà il quadrato inscritto; poichè, essendo uguali gli angoli AOB, BOC, ec., le corde AB, BC, ec. sono uguali.

Scolio. Essendo il triangolo BOC rettangolo e isoscele, si ha * $BC : BO :: \sqrt{2} : 1$; dunque *il lato del quadrato inscritto stà al raggio come la radice quadrata di 2 stà all'unità.* *P. 11. L. III.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

Inscrivere un esagono regolare e un triangolo equilatero in una circonferenza data.

Supponiamo risoluto il problema, e sia AB un lato dell' esagono inscritto; se si conducono i raggi AO, OB, dico che il triangolo AOB sarà equilatero, perchè l' angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti; così AOB $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: i due altri angoli ABO, BAO del medesimo triangolo vagliono insieme $2 - \frac{2}{3}$ o $\frac{4}{3}$, e siccome sono uguali, ciascuno di essi $= \frac{2}{3}$; dunque il lato dell' esagono inscritto è uguale al raggio.

Quindi resulta, che s' inscriverà un esagono regolare in una circonferenza data portando il raggio sei volte sulla circonferenza col che si ritornerà sul punto stesso donde si sarà cominciato.

Essendo inscritto l' esagono ABCDEF se si uniscono gli angoli alternativamente con linee si formerà il triangolo equilatero ACE.

Scolio. La figura ABCO è un parallelogrammo, ed anche un rombo, poichè AB = BC = CO — AO; dunque * la somma dei quadrati delle diagonali $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$ è uguale alla somma dei quadrati dei lati, la quale è $4\,\overline{AB}^2$, o $4\,\overline{BO}^2$; tagliando da ambe le parti $\overline{BO}^2$, resterà $\overline{AC}^2 = 3\overline{BO}^2$; dunque $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1$, o $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$; dunque *il lato de' triangolo equilatero inscritto stà al raggio come la radice di* 3 *stà all'unità*.

*P. 14 L. III.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA

F. 159. *Inscrivere in un circolo dato un decagono regolare, quindi un pentagono, e un pentedecagono.*

Dividete il raggio AO in estrema e media ragione nel punto M *, prendete la corda AB uguale al segmento maggiore OM, ed AB sarà il lato del decagono regolare che bisognerà trasportare dieci volte sulla circonferenza.

*Pr. 4. L. III.

Poichè, tirando MB, si ha per costruzione AO : OM : : OM : AM, o, a motivo di AB=OM, AO : AB : : AB : AM; dunque i triangoli ABO, AMB hanno un angolo commune A compreso fra lati proporzionali; dunque sono simili *. Il triangolo OAB è isoscele; dunque il triangolo AMB lo è pure, e si ha AB=BM : d'altronde AB=OM; dunque anche MB=OM; dunque il triangolo BMO è isoscele.

*P. 20. L. III.

L'angolo AMB esterno per rapporto al triangolo isoscele BMO è doppio dell'interno O *; ora l'angolo AMB=MAB, dunque il triangolo OAB è tale che ciascuno degli angoli alla base OAB o OBA è doppio dell'angolo alla sommità O; dunque i tre angoli del triangolo equivalgono a cinque volte l'angolo O, e quindi l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti, o la decima di quattro; dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare.

*P 27. L. I.

Corollario I. Se si uniscono di due in due gli angoli del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare ACEGI.

Corollario II. Essendo sempre AB il lato del decagono, sia AL il lato dell'esagono; allora l'arco BL sarà per rapporto alla cir-

conferenza $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, o $\frac{1}{15}$; dunque la corda BL sarà il lato del pentedecagono, o poligono regolare di 15 lati. Si vede nel tempo stesso che l'arco CL è la terza parte di CB.

Scolio. Essendo inscritto un poligono regolare, se si dividono gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e si tirino le corde dei mezzi-archi, queste formeranno un nuovo poligono regolare d'un doppio numero di lati. Così si vede che il quadrato può servire a inscrivere successivamente dei poligoni regolari di 8, 16, 32, ec. lati. Del pari l'esagono servirà a inscrivere dei poligoni regolari di 12, 24, 48, ec. lati; il decagono, dei poligoni di 20, 40, 80, ec. lati; il pentedecagono, dei poligoni di 30, 60, 120, ec. lati; e questi poligoni regolari sono i soli che si possano inscrivere colle semplici operazioni della geometria elementare.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA

Fig. 160. *Essendo dato il poligono regolare inscritto* ABCD, *ec. circoscrivere un poligono simile alla stessa circonferenza.*

Al mezzo T dell' arco AB conducete la tangente GH, che sarà parallela ad AB; fate la stessa cosa in mezzo agli altri archi BC, CD, ec. queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIK, ec: simile al poligono inscritto.

È facile di vedere primieramente che i tre punti O, B, H sono in linea retta, perchè i triangoli rettangoli OTH, OHN hanno

l'ipotenusa comune OH, e il lato OT=ON; dunque sono uguali; dunque l'angolo TOH =HON, e per conseguenza la linea OH passa per il punto B mezzo dell'arco TN. Per la medesima ragione, il punto I è sul prolungamento di OC, il punto K sul prolungamento di OD, ec. Ma, poichè GH è parallela ad AB, e HI a BC, l'angolo GHI= ABC; parimente HIK=BCD, ec. dunque gli angoli del poligono circoscritto sono uguali agli angoli del poligono inscritto. Di più, a cagione delle medesime parallele, si ha GH : AB : : OH : OB, e HI : BC : : OH : OB: dunque GH : AB : : HI : BC. Ma AB=BC, dunque GH=HI. Per la medesima ragione HI=IK, ec. dunque i lati dal poligono circoscritto sono uguali fra loro; dunque questo poligono è regolare e simile al poligono inscritto.

Corollario I. Reciprocamente, se fosse dato il poligono circoscritto GHIK, ec. e che bisognasse costruire col suo mezzo il poligono inscritto ABC, ec. si vede che basterebbe condurre agli angoli G, H, I, ec. del poligono dato le linee OG, OH, ec. che incontrerebbero la circonferenza nei punti A, B, C, ec.; si unirebbero in seguito questi punti colle corde AB, BC, ec. che formerebbero il poligono inscritto. Si potrebbe pure, nel medesimo caso, unire semplicemente i punti di contatto T, N, P, ec. colle corde TN, N P, ec., il che formerebbe ugualmente un poligono inscritto simile al circoscritto.

Corollario II. Dunque si può circoscrivere

i

a un circolo dato tutti i poligoni regolari che vi si sanno inscrivere, e reciprocamente.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

La superficie d' un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo inscritto.

Fig.160. Sia, per esempio il poligono regolare GHIK, ec.: il triangolo GOH ha per misura GH $\times \frac{1}{2}$OT, il triangolo OHI ha per misura HI $\times \frac{1}{2}$ON : ma ON=OT; dunque i due triangoli hanno per misura (GH+HI) $\times$ $\frac{1}{2}$OT. Continuando del pari per gli altri triangoli, si vedrà che la somma di tutti i triangoli, o il poligono intiero ha per misura la somma delle basi GH, HI, IK, ec., o il perimetro del poligono moltiplicato per $\frac{1}{2}$ OT metà del raggio del circolo inscritto.

Scolio. Il raggio del circolo inscritto OT non è altro che la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati; si chiama talora l'*apotema* del poligono.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

I perimetri de' poligoni regolari d' un medesimo numero di lati stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli inscritti; le loro superfici stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

F. 161. Sia AB un lato d' uno de' poligoni di cui si tratta, O il suo centro, e per conseguenza OA il raggio del circolo circoscritto, e OD

perpendicolare sopra AB il raggio del circolo inscritto; sia parimente *ab* il lato d' un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa*, e *od* i raggi dei circoli circoscritto e inscritto: i perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati AB, e *ab*. Ma gli angoli A ed *a* sono uguali, essendo ciascuno la metà dell'angolo del poligono; è lo stesso degli angoli B e *b*: dunque i triangoli ABO, *abo* sono simili, come pure i triangoli rettangoli ADO, *ado*; dunque AB : *ab* :: AO : *ao* :: DO : *do*; dunque i perimetri dei poligoni stanno fra loro come i raggi AO, *ao* de' circoli circoscritti, e parimente come i raggi, DO, *do* de' circoli inscritti.

Le superfici di questi medesimi poligoni stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; e per conseguenza stanno ancora come i quadrati dei raggi dei circoli circoscritti AO, *ao*, o come i quadrati dei raggi dei circoli inscritti OD, *od*.

PROPOSIZIONE IX.

LEMMA.

Ogni linea curva o poligona che circonda da un estremità all' altra la linea convessa AMB *è maggiore della linea circondata* AMB.

Abbiamo già detto che per linea *convessa* intendiamo una linea curva, o poligona, o in parte curva e in parte poligona, tale che una linea retta non possa tagliarla in più di due punti. Se la linea AMB avesse delle parti rientranti, o delle sinuosità, cesserebbe d' esser convessa, perchè è facile il vedere F. 162.

che una linea retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di circolo sono essenzialmente convessi, ed anche uniformemente convessi; ma la proposizione di cui si tratta adesso si estende ad una linea qualunque che soddisfaccia alla condizione predetta.

Posto ciò, se la linea AMB non è minore di tutte quelle che la circondano, esisterà fra queste una linea più corta di tutte le altre la quale sarà minore di AMB o al più uguale ad AMB. Sia ACDEB questa linea circondante; fra le due linee conducete ove vorrete la retta PQ che non incontri la linea AMB, o che la tocchi soltanto: la retta PQ è minore di PCDEQ; dunque se alla parte PCDEQ si sostituisce la linea retta PQ si avrà la linea circondata APQB minore di APDQB. Ma per supposizione questa doveva esser la più corta di tutte; dunque questa supposizione non può sussistere, dunque tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

Fig. 163. *Scolio*. Si dimostrerà assolutamente nella stessa maniera che una linea convessa e rientrante in se stessa AMB è più corta d' ogni linea che la circondasse da ogni parte, tanto se la linea circondante FHG tocca AMB in uno o più punti, quanto se la circonda senza toccarla.

PROPOSIZIONE X.

LEMMA.

Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre inscrivere nella maggiore un po-

ligono regolare i di cui lati non incontrino la minore, e si può pure circoscrivere alla minore un poligono regolare i di cui lati non incontrino la maggiore. Così in ambedue i casi i lati del poligono descritto saranno racchiusi fra le due circonferenze.

Siano CA, CB i raggi delle due circonferenze date. Per il punto A conducete la tangente DE terminata alla circonferenza maggiore in D ed E. Inscrivete nella circonferenza maggiore uno dei poligoni regolari che si possono inscrivere per i teoremi precedenti, dividete quindi gli archi sottesi dai lati in due parti uguali, e conducete le corde dei mezzi-archi: nascerà un poligono regolare d'un doppio numero di lati. Continuate la bisezione degli archi finchè giungiate a un arco minore di DBE. Sia MBN quest'arco, il di cui mezzo è supposto B; è chiaro che la corda MN sarà più lontana dal centro di DE, e che perciò il poligono regolare di cui MN è lato non può incontrare la circonferenza di cui CA è il raggio. F. 164.

Poste le medesime cose, tirate CM e CN che segano la tangente DE in P, e Q; PQ sarà il lato d'un poligono circoscritto alla circonferenza minore simile al poligono inscritto nella maggiore il di cui lato è MN. Ora è chiaro che il poligono circoscritto che ha per lato PQ non può arrivare alla circonferenza maggiore, poichè CP è minore di CM.

Dunque, colla medesima costruzione, si può descrivere un poligono regolare inscritto nella circonferenza maggiore, e un poligono si-

mile circoscritto alla minore, i di cui lati saranno compresi fra le due circonferenze.

Scolio. Se si hanno due settori concentrici FCG, ICH, si potrà similmente inscrivere nel maggiore una *porzione di poligono regolare*, o ciscoscrivere al minore una porzione di poligono simile, talmente che i contorni dei due poligoni siano compresi fra le due circonferenze: basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16, ec. parti uguali, finchè si arrivi a una parte minore di DBE.

Chiamiamo quì *porzione di poligono regolare* la figura che risulta da una serie di corde uguali inscritte nell'arco FG da un estremità all'altra. Questa porzione ha le proprietà principali dei poligoni regolari, ha gli angoli uguali, è ad un tempo inscrivibile e circoscrivibile al circolo, per altro ella non farebbe parte di un poligono regolare propriamente detto, se l'arco sotteso da uno dei suoi lati non fosse una parte aliquota della circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Le circonferenze de' circoli sono come i raggi, e le loro superfici come i quadrati dei raggi.

Fig. 165 Per abbreviare, indichiamo con *circ.* CA la circonferenza che ha per raggio CA; dico che si avrà *circ.* CA : *circ.* OB :: CA : OB.

Poichè, se questa proporzione non ha luogo, CA starà ad OB come *circ.* CA stà a una circonferenza maggiore o minore di *circ.* OB. Supponiamo che sia minore; e sia, s'è possibile, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD.

Inscrivete nella circonferenza di cui OB è il raggio un poligono regolare EFGKLE i di cui lati non incontrino la circonferenza di cui OD è il raggio; inscrivete un poligono simile MNPSTM nella circonferenza di cui CA è il raggio.

Posto ciò, poichè questi poligoni sono simili, i loro perimetri MNPSM, EFGKE stanno fra loro come i raggi CA, OB de' circoli circoscritti *, e si avrà MNPSM : EFGKE :: CA : OB; ma, per supposizione, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD; dunque MNPSM : EFGKE :: *circ.* CA : *circ.* OD. Or questa proporzione è impossibile, perchè il contorno MNPSM è minore di *circ.* CA *, e al contrario EFGKE è maggiore di *circ.* OD; dunque è impossibile che CA stia ad OB, come *circ.* CA stà a una circonferenza minore di *circ.* OB, o in termini più generali, è impossibile che un raggio stia a un raggio come la circonferenza del primo raggio stà a una circonferenza minore della circonferenza del secondo raggio.

* P. 8.

* Pr. 9.

Da ciò conchiudo che non si può dare neppure che CA stia ad OB come *circ.* CA a una circonferenza maggiore di *circ.* OB; poichè, se ciò fosse, si avrebbe rovesciando i rapporti, OB a CA come una circonferenza maggiore di *circ.* OB a *circ.* CA; o, il che è lo stesso, come *circ.* OB ad una circonferenza minore di *circ.* CA; dunque un raggio starebbe ad un raggio come la circonferenza del primo raggio stà a una circonferenza minore della circonferenza del secondo raggio, il che è stato dimostrato impossibile.

Ma se il quarto termine della proporzione CA : OB :: *circ.* CA : X non può essere nè maggiore nè minore di *circ.* OB, bisogna che sia uguale a *circ.* OB; dunque le circonferenze de' circoli stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento e una costruzione intieramente simili serviranno a dimostrare che le superfici dei circoli stanno come i quadrati de' loro raggi. Non entreremo in altri dettagli su questa proposizione che d'altronde è un corollario della seguente.

F. 166. *Corollario.* Gli archi simili AB, DE stanno come i raggi AC, DO, e i settori simili ACB, DOE come i quadrati di questi medesimi raggi.

Poichè, siccome gli archi sono simili, l'angolo C è uguale all'angolo O: ora l' angolo C stà a quattro angoli retti come l' arco AB stà alla circonferenza intiera descritta col raggio AC *, e l'angolo O stà a quattro angoli retti come l'arco DE stà alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE stanno fra loro come le circonferenze di cui fanno parte; queste circonferenze stanno come i raggi AC, DO; dunque AB : DE :: AC : DO.

*P. 17. L. II.

Per la medesima ragione i settori ACB, DOE stanno come i circoli intieri, questi stanno come i quadrati de' raggi; dunque ACB : DOE :: $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

La superficie del circolo ha per misura il pro-

dotto della sua circonferenza per la metà del raggio.

Indichiamo con *sup.* CA la superficie del circolo il di cui raggio è CA; dico che sarà *sup.* CA$=\frac{1}{2}$CA$\times$*circ.* CA. F. 167.

Poichè se $\frac{1}{2}$CA$\times$ *circ.* CA non è la misura del circolo il di cui raggio è CA, questa quantità sarà la misura d'un circolo maggiore o minore. Supponiamo primieramente che sia la misura d'un circolo maggiore, e sia, se è possibile, $\frac{1}{2}$CA$\times$ *circ.* CA$=$ *sup.*CB.

Al circolo il di cui raggio è CA circoscrivete un poligono regolare DEFG ec., i di cui lati non incontrino la circonferenza di cui CB è il raggio *; la superficie di questo poligono sarà uguale al suo contorno DE+EF+FG+, ec., moltiplicato per $\frac{1}{2}$AC *: ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza inscritta poichè la circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligono DEFG, ec. è maggiore di $\frac{1}{2}$AC$\times$ *circ.* AC che è la misura del circolo di cui CB è il raggio; dunque il poligono sarebbe maggiore del circolo: ora al contrario è minore poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che $\frac{1}{2}$CA$\times$ *circ.* CA sia maggiore di *sup.* CA, o in altri termini, è impossibile che la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un circolo maggiore.

* P. 10.
* P. 7.

Dico in secondo luogo che il medesimo prodotto non può essere la misura d'un circolo minore, e per non cambiar figura, supporrò che si tratti del circolo il di cui rag-

gio è CB: bisogna dunque provare che $\frac{1}{2}$CB$\times$ *circ.* CB non può esser la misura d'un circolo minore, per esempio, del circolo il di cui raggio è CA. In fatti sia, se è possibile, $\frac{1}{2}$CB$\times$ *circ.* CB$=$ *sup.* CA.

Avendo fatto la stessa costruzione di sopra, la superficie del poligono DEFG, ec. avrà sempre per misura il suo contorno moltiplicato per la metà del raggio CA. Il contorno del poligono è minore di *circ.* CB che lo circonda da tutte le parti; il raggio CA è minore del raggio CB; per questa doppia ragione, la superficie del poligono è minore di $\frac{1}{2}$CB$\times$ *circ.* CB che è per supposizione la misura del circolo di cui CA è il raggio; dunque il poligono sarebbe minore del circolo inscritto, il che è assurdo; dunque è impossibile che la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un circolo minore.

Dunque finalmente la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio è la misura del medesimo circolo.

F. 168. *Corollario I.* La superficie d'un settore è uguale all'arco di questo settore moltiplicato per la metà del raggio.

Poichè, il settore ACB stà al circolo intiero come l'arco AMB stà alla circonferenza intiera ABD, o come AMB$\times\frac{1}{2}$AC sta ad ABD$\times\frac{1}{2}$AC: ma il circolo intiero $=$ABD$\times$ $\frac{1}{2}$AC; dunque il settore ACB ha per misura AMB$\times\frac{1}{2}$AC.

Corollario II. Chiamiamo p la circonferenza il di cui diametro è l'unità; poichè le

circonferenze stanno come i raggi, o come i diametri, si potrà fare questa proporzione: il diametro 1 stà alla sua circonferenza p come il diametro $2CA$ stà alla circonferenza che ha per raggio CA; talmente che si avrà $1 : p :: 2CA : circ.\ CA$; dunque $circ.\ CA = 2p \times CA$. Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{1}{2}CA$, si avrà $\frac{1}{2}CA \times circ.\ CA = p \times \overline{CA}^2$, o $sup.\ CA = p.\overline{CA}^2$; dunque *la superficie d'un circolo è uguale al quadrato del suo raggio moltiplicato per il numero costante p, che rappresenta la circonferenza il di cui diametro è 1, o il rapporto della circonferenza al diametro.*

Parimente la superficie del circolo che ha per raggio OB sarà uguale a $p \times \overline{OB}^2$; ora $p \times \overline{CA}^2 : p \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; dunque *le superfici dei circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi*, il che s'accorda col teorema precedente. F. 165.

Scolio. Abbiamo già detto che il problema della quadratura del circolo consiste a trovare un quadrato uguale in superficie a un circolo il di cui raggio è cognito; ma si è adesso provato che il circolo è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza e sulla metà del raggio, e questo rettangolo si cangia in un quadrato prendendo una media proporzionale fra le due sue dimensioni; onde il problema della quadratura del circolo si riduce a trovare la circonferenza quando si conosce il raggio, e per questo basta conoscere il rapporto della circonferenza al raggio o al diametro.

Finora non si è potuto determinare questo rapporto che in una maniera prossima; ma l'approssimazione è stata portata sì lungi, che la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale al di sopra di quella del rapporto prossimo. Perciò questa ricerca che ha molto occupato i geometri allorchè i metodi di approssimazione erano meno conosciuti, è adesso riposta tra le ricerche futili di cui non è permesso d'occuparsi se non a coloro che hanno appena le prime nozioni della geometria.

Archimede ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3 \frac{10}{70}$ e $3 \frac{10}{71}$; onde $3 \frac{1}{7}$ è un valore già molto prossimo del numero che abbiamo rappresentato con p, e questa prima approssimazione è molto in uso a cagione della sua semplicità. *Mezio* ha trovato per il medesimo numero il valore molto più prossimo $\frac{355}{113}$. Finalmente il valore di p sviluppato fino a un certo ordine di decimali, è stato trovato da altri calcolatori 3, 14159265358979 32, ec., e *de Lagny* ha avuto la pazienza di continuare queste decimali fino alla centoventisettesima. È chiaro che una tale approssimazione equivale alla verità, e che non si conoscono di più le radici delle potenze imperfette.

Si spiegheranno nei problemi seguenti due dei metodi più semplici per ottenere queste approssimazioni.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA

Essendo date la superficie d'un poligono regolare inscritto e la superficie d'un poligono simile circoscritto, trovare le superfici dei poligoni regolari inscritto e circoscritto d'un doppio numero di lati.

Sia AB il lato del poligono dato inscritto, EF parallelo ad AB il lato del poligono simile circoscritto, C il centro del circolo: se si tira la corda AM, e le tangenti AP, BQ, la corda AM sara il lato del poligono inscritto d'un doppio numero di lati, e PQ doppio di PM sarà quello del poligono simile circoscritto. Posto ciò, siccome ogni angolo uguale ad ACM racchiude i medesimi triangoli, basta considerare l'angolo ACM solo, e i triangoli che vi sono contenuti staranno fra loro come i poligoni intieri. Sia A la superficie del poligono inscritto di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto, A′ la superficie del poligono di cui AM è un lato, B′ la superficie del poligono simile circoscritto; A e B sono cogniti: si tratta di trovare A′ e B′.

F. 169.

1.° I triangoli ACD, ACM la di cui sommità comune è A stanno fra loro come le loro basi CD, CM; d'altronde questi triangoli stanno come i poligoni A e A′ di cui fanno parte; dunque A : A′ : : CD : CM. I triangoli CAM, CME la di cui sommità comune è M stanno fra loro come le loro basi CA, CE; questi medesimi triangoli stanno come

i poligoni A′ e B di cui fanno parte; dunque A′ : B :: CA : CE. Ma, a motivo delle parallele AD, ME, si ha CD : CM :: CA : CE; dunque A : A :: A′ : B: dunque il poligono A′, uno di quelli che si cercano è medio proporzionale fra i due poligoni cogniti A, e B, e si ha per conseguenza $A' = \sqrt{A \times B}$.

2.° Il triangolo CPM sta al triangolo CPE, a motivo dell'altezza comune CM come PM stà a PE; ma dividendo la linea CP in due parti uguali l'angolo MCE, si ha * PM : PE : CM : CE :: CD : CA :: A : A′; dunque CPM : CPE :: A : A′, *componendo* CMP : CPM+CPE, o CME, :: A : A+A. Ma CMPA o 2CMP, e CME stanno fra loro come i poligoni B′ e B di cui fanno parte; dunque B′ : B :: 2A : A+A′. Si è già determinato A′, questa nuova proporzione determinerà B′, e si avrà $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$; dunque col mezzo dei poligoni A e B, è facile di trovare i poligoni A′ e B′ che hanno doppio numero di lati.

*P. 17 L. III.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA

Trovare il rapporto prossimo della circonferenza al diametro.

Sia il raggio del circolo $=1$, il lato del quadrato inscritto sarà $\sqrt{2}$ *; quello del quadrato circoscritto è uguale al diametro 2; dunque la superficie del quadrato inscritto $=2$, e quella del quadrato circoscritto $=4$. Adesso, se si fa $A=2$ e $B=4$, si troverà per il

*P. 3

problema precedente l' ottagono inscritto $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$, e l' ottagono circoscritto $B' = \frac{16}{2+\sqrt{8}} = 3,3137085$. Conoscendo così gli ottagoni inscritto e circoscritto, si troverà col loro mezzo i poligoni d'un doppio numero di lati; bisognerà nuovamente supporre $A = 2,8284271$, $B = 3,3137085$, e si avrà $A' = \sqrt{A \times B} = 3,0614674$, e $B' = \frac{2A \times B}{A + A'} = 3,1825979$. Dipoi questi poligoni di 16 lati serviranno a conoscere quelli di 32, e si continuerà così, finchè il calcolo non dia più differenza fra i poligoni inscritto, e circoscritto, almeno nelle cifre decimali impiegate, che in questo caso sono sette. Arrivati a tal punto, si conchiuderà che il circolo è uguale all'ultimo resultato, perchè il circolo deve sempre esser compreso tra il poligono inscritto e il poligono circoscritto; dunque se questi non differiscono fra loro fino a una certa cifra decimale, il circolo pure non ne differirà fino alla stessa cifra.

Ecco il calcolo di questi poligoni prolungato finchè non differiscano più nella settima cifra decimale.

Numero dei lati.	Poligono inscritto.	Poligono circoscritto.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236

256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,14 5729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Da ciò conchiudo che la superficie del circolo $=3,1415926$. Si potrebbe aver dubbio sull'ultima decimale a cagione degli errori prodotti dalle parti trascurate; ma il calcolo è stato fatto con una decimale di più, per esser certi del resultato che abbiam trovato fino all'ultima decimale.

Poichè la superficie del circolo è uguale alla mezza-circonferenza moltiplicata per il raggio, essendo il raggio $=1$, la mezza-circonferenza è $3,1415926$; ovvero, essendo il diametro $=1$, la circonferenza è $3,1415926$; dunque il rapporto della circonferenza al diametro indicato di sopra con $p=3,1415926$.

PROPOSIZIONE XV.

LEMMA.

F. 170. *Il triangolo* CAB *è equivalente al triangolo isoscele* DCE, *che ha il medesimo angolo* C, *e il di cui lato* CE *o* CD *è medio proporzionale fra* CA *e* CB. *Di più, se l'angolo* CAB *è retto, la perpendicolare* CF *abbassata sulla base del triangolo isoscele sarà media proporzionale fra il lato* CA *e la mezza-somma dei lati* CA, CB.

Perchè, 1.° a motivo dell'angolo comune C, il triangolo ABC stà al triangolo isoscele DCE come $AC \times CB$ stà a $DC \times CE$, o $\overline{DC}^2$ * ; dunque questi triangoli saranno equivalenti, se $\overline{DC}^2 = AC \times CB$, o se DC è media proporzionale fra AC e CB.

* P. 24. L. III.

2.° La perpendicolare CGF tagliando in due parti uguali l'angolo ACB, si ha * AG : GB :: AC : CB, donde ne segue *componendo* AG : AG+GB o AB :: AC : AC+CB; ma AG stà ad AB come il triangolo ACG stà al triangolo ACB o 2CDF; d'altronde, se l'angolo A è retto, i triangoli rettangoli ACG, CDF sono simili, e si ha ACG : CDF :: $\overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$; dunque

* P. 17. L. III.

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC+CB.$$

Moltiplicando il secondo rapporto per AC, gli antecedenti diverranno uguali, e si avrà per conseguenza $2\overline{CF}^2 = AC \times (AC+CB)$, o $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC+CB}{2}\right)$; dunque 2° se l'angolo A è retto la perpendicolare CF sarà media proporzionale tra il lato AC, e la mezza-somma dei lati AC, CB.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA

Trovare un circolo che differisca quanto poco si voglia da un poligono regolare dato.

F. 171.

Sia proposto per esempio il quadrato BMNP;

abbassate dal centro C la perpendicolare CA sul lato MB, e tirate CB.

Il circolo descritto col raggio CA è inscritto nel quadrato, e il circolo descritto col raggio CB è circoscritto al medesimo quadrato; il primo sarà minore del quadrato, il secondo sarà maggiore; si tratta di ristringere questi limiti.

Prendete CD e CE uguali ciascuna alla media proporzionale tra CA e CB, tirate ED, e il triangolo isoscele CDE sarà equivalente al triangolo CAB; fate lo stesso per ciascuno degli otto triangoli che compongono il quadrato, e formerete così un ottagono regolare equivalente al quadrato BMNP. Il circolo descritto col raggio CF medio proporzionale fra CA e $\frac{CA+CB}{2}$ sarà inscritto nell'ottagono, e il circolo descritto col raggio CD gli sarà circoscritto. Onde il primo sarà minore del quadrato, e il secondo maggiore.

Se si cangia nella medesima maniera il triangolo rettangolo CDF in un triangolo isoscele equivalente, si formerà con tal mezzo un poligono regolare di sedici lati equivalente al quadrato proposto. Il circolo inscritto in questo poligono sarà minore del quadrato, e il circolo circoscritto sarà maggiore.

Si può continuare così finchè il rapporto tra il raggio del circolo inscritto e il raggio del circolo circoscritto differisca quanto poco si vorrà dall'uguaglianza. Allora l'uno e l'altro circolo potrà esser riguardato come equivalente al quadrato proposto.

Ecco a cosa si riduce la ricerca dei raggi successivi. Sia *a* il raggio del circolo inscrit-

to in uno dei poligoni trovati, b il raggio del circolo circoscritto al medesimo poligono; siano a' e b' i raggi simili per il poligono seguente che ha un doppio numero di lati. Secondo ciò che abbiamo dimostrato, b' è una media proporzionale fra a e b, e a' è una media proporzionale fra a e $\frac{a+b}{2}$, talmente che si avrà $b'=\sqrt{a\times b}$, e $a'=\sqrt{a\times\frac{a+b}{2}}$, dunque essendo cogniti i raggi a e b d'un poligono, se ne deducono facilmente i raggi a' e b' del poligono seguente; e si continuerà così finchè la differenza fra i due raggi sia divenuta insensibile; allora l'uno o l'altro di questi raggi sarà il raggio del circolo equivalente al quadrato o al poligono proposto.

Scolio. Questo metodo è facile a praticarsi in linee, poichè si riduce a trovare delle medie proporzionali successive fra linee cognite, ma riesce ancor meglio in numeri, ed è uno dei più comodi che la geometria elementare possa offrire per trovare prontamente il rapporto prossimo della circonferenza al diametro. Sia il lato del quadrato $=2$, il primo raggio inscritto CA sarà 1, e il primo raggio circoscritto CB sarà $\sqrt{2}$ o $1,4142136$. Facendo dunque $a=1$, $b=1,4142136$, si troverà $b'=1,1892071$, e $a'=1,0986841$. Questi numeri serviranno a calcolare i seguenti secondo la legge di continuazione. Ecco il resultato del calcolo fatto fino a sette o otto cifre colle tavole dei logaritmi ordinari.

Raggi de' circoli circoscritti.		Raggi de' circoli inscritti.
1,4142136	. . . .	1,0000000
1,1892071	. . . .	1,0986841
1,1430500	. . . .	1,1210863
1,1320149	. . . .	1,1265639
1,1292862	. . . .	1,1279257
1,1286063	. . . .	1,1282657

Adesso che la prima metà delle cifre è la medesima dalle due parti, invece dei medi geometrici si possono prendere i medi aritmetici che ne differiscono soltanto nelle decimali ulteriori. Con tal mezzo l'operazione si abbrevia molto, e i resultati sono,

1,1284360	. . . .	1,1283508
1,1283934	. . . .	1,1283721
1,1283827	. . . .	1,1283774
1,1283801	. . . .	1,1283787
1,1283794	. . . .	1,1283791
1,1283792	. . . .	1,1283792

Dunque 1,1283792 è molto prossimamente il raggio del circolo uguale in superficie al quadrato il di cui lato è 2. Quindi è facile di trovare il rapporto della circonferenza al diametro; perchè si è dimostrato che la superficie del circolo è uguale al quadrato del raggio moltiplicato per il numero p; dunque se si divide la superficie 4 per il quadrato di 1,1283792, si avrà il valore di p che si trova con questo calcolo essere 3,1415926, ec. come si era trovato con un altro metodo.

APPENDICE AL LIBRO QUARTO.

DEFINIZIONI

I. Si chiama *massimo* la quantità più grande di tutte quelle della medesima specie; si chiama *minimo* la più piccola.

Così il diametro del circolo è un *massimo* fra tutte le linee che congiungono due punti della circonferenza, e la perpendicolare è un *minimo* fra tutte le linee condotte da un punto dato ad una linea data.

II. Si chiamano figure *isoperimetre* quelle che hanno i perimetri uguali.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Fra tutti i triangoli della stessa base, e dello stesso perimetro, il triangolo isoscele è un massimo.

Sia AC=CB, e AM+MB=AC+CB; dico che il triangolo isoscele ACB è maggiore del non isoscele AMB che ha la medesima base e il medesimo perimetro. F. 172.

Dal punto C come centro, e col raggio CA=CB, descrivete una circonferenza che incontri CA prolungato in D; tirate DB, e l'angolo DBA inscritto nel mezzo-circolo sarà un angolo retto. Prolungate la perpendicolare DB verso N, fate MN=MB, e tirate AN. Finalmente dai punti M e C abbassate MP, CG perpendicolari sopra DN. Poi-

chè CB=CD, e MN=MB, si ha AC+CB =AD, e AM+MB=AM+MN. Ma AC+CB =AM+MB; dunque AD=AM+MN; dunque AD>AN: ora se l'obliqua AD è maggiore dell'obliqua AN, deve essere più lontana dalla perpendicolare AB; dunque DB>BN. Ma la base BD è divisa in due parti uguali al punto G * come pure BN al punto P; si ha dunque ancora BG>BP. Ma i triangoli ABC, ABM che hanno la medesima base AB stanno fra loro come le loro altezze BG, BP; e poichè BG>BP, ne segue che il triangolo isoscele ABC è maggiore del non-isoscele ABM della medesima base, e del medesimo perimetro.

* P. 13. L. I.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Di tutti i poligoni isoperimetri, e d' un medesimo numero di lati, il più grande è equilatero.

F. 173. Poichè, sia il poligono ABCDEF il poligono *massimo*, se il lato BC non è uguale a CD, fate sulla base BD un triangolo isoscele BOD, che sia isoperimetro con BCD; il triangolo BOD sarà maggiore di BCD, e per conseguenza il poligono ABODEF sarà maggiore di ABCDEF: dunque quest' ultimo non sarebbe il massimo fra tutti quelli che hanno il medesimo perimetro e il medesimo numero di lati, il che è contro la supposizione; dunque BC=CD: per la medesima ragione CD=DE; DE=EF; dunque tutti i lati del poligono *massimo* sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Di tutti i triangoli formati con due lati dati che facciano fra loro un angolo a piacere, il massimo è quello in cui i due lati dati formano un angolo retto.

Siano i due triangoli BAC, BAD che hanno il lato AB comune, e il lato AC=AD: se l'angolo BAC è retto, dico che il triangolo BAC sarà maggiore del triangolo BAD. F. 174.

Poichè, essendo la stessa la base AB, i due triangoli BAC, BAD stanno come le altezze AC, DE: ma la perpendicolare DE è minore di AD o della sua uguale AC; dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Di tutti i poligoni formati con dei lati dati e un ultimo a piacere, il massimo deve essere tale che tutti i suoi angoli siano inscritti in una mezza-circonferenza di cui il lato incognito sia il diametro.

Sia ABCDEF il più grande dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF, e un ultimo AF a piacere; tirate le diagonali AD, DF. Se l'angolo ADF non è retto, si potrà, conservando le parti ABCD, DEF tali quali sono, aumentare il triangolo ADF e per conseguenza il poligono intiero, rendendo l'angolo ADF retto: ma questo poligono non può essere aumentato di più, poichè si suppone giunto al suo *massimo*; F. 175.

dunque l'angolo ADF è già retto. Lo stesso è degli angoli ABF, ACF, AEF; dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F del poligono *massimo* sono inscritti in una mezza-circonferenza di cui il lato indeterminato AF è il diametro.

Scolio. Questa proposizione fa nascere la questione se vi siano diverse maniere di formare un poligono con dei lati dati, e un ultimo incognito che sarà il diametro della mezza-circonferenza nella quale gli altri lati sono inscritti. Avanti di decidere questa questione, bisogna osservare che se una medesima corda AB sottende degli archi descritti con differenti raggi AC, AD, l'angolo al centro appoggiato su questa corda sarà minore nel circolo il di cui raggio è maggiore; così $ACB < ADB$, perchè l'angolo $ADO = ACD + CAD$; dunque $ADB = ACB + CAD + CBD$.

F. 176.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

V'è una sola maniera di formare il poligono ABCDEF *con dei lati dati, e un ultimo incognito che sia il diametro della mezza-circonferenza nella quale sono inscritti gli altri lati.*

F. 175.

Poichè, supponiamo che si sia trovato un circolo che soddisfaccia alla questione: se si prende un circolo maggiore, le corde AB, BC, CD, ec. corrisponderanno ad angoli al centro minori. La somma di questi angoli al centro sarà dunque minore di due angoli ret-

ti, e così le estremità dei lati dati non perverranno più alle estremità del diametro. L'inconveniente contrario avrà luogo se si prende un circolo minore; dunque il poligono di cui si tratta non può essere inscritto che in un solo circolo.

Scolio. Si può cambiare a piacere l'ordine dei lati AB, BC, CD, ec. e il diametro del circolo circoscritto sarà sempre lo stesso, come pure la superficie del poligono; poichè, qualunque sia l'ordine degli archi AB, BC, ec. basta che la loro somma faccia la mezza-circonferenza, e il poligono avrà sempre la medesima superficie, poichè sarà uguale al mezzo-circolo meno i segmenti AB, BC, ec. la di cui somma è sempre la stessa.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Di tutti i poligoni formati con lati dati, il massimo è quello che si può inscrivere in un circolo.

Sia ABCDEFG il poligono inscritto, e *abcdefg* il non-inscrivibile formato con dei lati uguali, talmente che sia AB=*ab*, BC=*bc*, ec.; dico che il poligono inscritto è maggiore dell'altro. F. 177.

Tirate il diametro EM: conducete AM, MB; sopra *ab*=AB fate il triangolo *abm*=ABM, e tirate *em*.

In virtù della proposizione 4. il poligono EFGAM è maggiore di *efgam*, a meno che questo non possa essere parimente inscritto in una mezza-circonferenza di cui il lato *em*

sarebbe il diametro, nel qual caso i due poligoni sarebbero uguali in virtù della proposizione 5. Per la medesima ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, eccetto il medesimo caso in cui vi sarebbe uguaglianza. Dunque il poligono intiero EFGAMBCDE è maggiore di *efgambcde* a meno che non siano intieramente uguali; ma essi non lo sono, poichè l'uno è inscrivibile, e l'altro è supposto non inscrivibile; dunque il poligono inscritto è il maggiore. Togliendo da ambedue i triangoli uguali ABM, *abm*, resterà il poligono inscritto ABCDEFG maggiore del noninscrivibile *abcdefg*.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Il poligono regolare è un massimo fra tutti i poligoni isoperimetri e d'un medesimo numero di lati.

Poichè, secondo il teorema 2, il poligono *massimo* ha tutti i suoi lati uguali; e, secondo il teorema precedente, è inscrivibile nel circolo; dunque è regolare.

PROPOSIZIONE VIII.

LEMMA

Due angoli al centro, misurati in due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi compresi divisi per i loro raggi.

F. 178. Così l'angolo C stà all'angolo O come il rapporto $\frac{AB}{AC}$ stà al rapporto $\frac{DE}{DO}$.

Con un raggio OF uguale ad AC descri-

vete l'arco FG compreso fra i lati OD, OE prolungati: a cagione de' raggi uguali AC, OF, si avrà primieramente $C : O :: AB : FG$, o $:: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$; ma a cagione degli archi simili FG, DE, si ha * $FG : DE :: FO : DO$; dunque il rapporto $\frac{FG}{FO}$ è uguale al rapporto $\frac{DE}{DO}$, e per conseguenza si ha

$$C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}.$$

* P. 11.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Di due poligoni regolari isoperimetri, quello che ha più lati è il maggiore.

F. 179.

Sia DE il mezzo-lato d'uno dei poligoni, O il suo centro, OE il suo apotema: sia AB il mezzo-lato dell'altro poligono, C il suo centro, CB il suo apotema. Si suppongono i centri O, e C situati a una distanza qualunque OC, e gli apotemi OE, CB nella direzione OC: così DOE, e ACB saranno i mezzi-angoli al centro dei poligoni, e siccome questi angoli non sono uguali, le linee AC, OD prolungate s'incontreranno in un punto F; da questo punto abbassate sopra OC la perpendicolare FG; dai punti O e C come centri, descrivete gli archi GI, GH terminati ai lati OF, CF.

Posto ciò, si avrà per il lemma preceden-

te $O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; ma DE stà al perimetro del primo poligono come l'angolo O stà a quattro angoli retti, e AB stà al perimetro del secondo come l'angolo C stà a quattro angoli retti; dunque, poichè i perimetri dei poligoni sono uguali, $DE : AB ::$ $O : C$; dunque $DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$.

Moltiplicando gli antecedenti per OG, e i conseguenti per CG, si avrà allora $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$; ma i triangoli simili ODE, OFG danno $OE : OG :: DE : FG$, donde resulta $DE \times OG = OE \times FG$. Si avrà parimente $AB \times CG = CB \times FG$; dunque $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, o $OE : CB :: GI : GH$. Dico adesso che l'arco GI è maggiore dell'arco GH, e allora ne seguirà che l'apotema OE è maggiore di CB.

In fatti prolungate l'arco GH d'una quantità $KH = HG$; con un raggio KP uguale ad OG descrivete l'arco Kx uguale ad xG; la curva KxG che circonda l'arco KHG è maggiore di quest'arco *; dunque Gx metà della curva è maggiore di GH metà dell'arco; dunque molto più GI è maggiore di GH.

* P. 9.

Resulta da ciò che l'apotema OE è maggiore di CB: ma i due poligoni avendo il medesimo perimetro stanno fra loro come i loro apotemi *; dunque il poligono che ha per mezzo-lato DE è maggior di quello che ha per mezzo-lato AB; il primo ha più lati poichè l'angolo al centro è minore; dunque di

* P. 7.

due poligoni regolari isoperimetri, quello che ha più lati è il maggiore.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

Si è già provato che di tutti i poligoni isoperimetri e d'un medesimo numero di lati, il poligono regolare è il più grande; onde non si tratta che di paragonare il circolo a un poligono regolare qualunque isoperimetro. Sia AI il mezzo-lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel circolo isoperimetro l'angolo DOE=ACI, e perciò l'arco DE uguale al mezzo-lato AI. Il poligono P starà al circolo C come il triangolo ACI stà al settore ODE, o $P : C :: \frac{AI \times CI}{2} : \frac{DE \times OE}{2}$ $:: CI : OE$. Sia condotta al punto E la tangente EG; i triangoli simili ACI, GOE, daranno la proporzione $CI : OE :: AI$ o $DE : GE$; dunque $P : C :: DE : GE$, o come $DE \times \frac{1}{2}OE$ che è la misura del settore DOE stà a $GE \times \frac{1}{2}OE$ che è la misura del triangolo GOE: ora il settore è minore del triangolo; dunque P è minore di C; dunque il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro. F. 18.

LIBRO QUINTO

I PIANI E GLI ANGOLI SOLIDI.

DEFINIZIONI

1. Una linea retta è *perpendicolare a un piano*, quando è perpendicolare * a tutte le rette che passano per il suo *piede* nel piano. Reciprocamente il piano è perpendicolare alla linea.

* P. 4.

Il *piede* della perpendicolare è il punto ove questa linea incontra il piano.

2. Una linea è *parallela ad un piano*, quando non può incontrarlo, a qualunque distanza si prolunghino ambedue. Reciprocamente il piano è parallelo alla linea.

3. Due *piani* sono *paralleli* fra loro, quando non possono incontrarsi, a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altro.

4. Si dimostrerà * che l'intersezione comune di due piani che s'incontrano è una linea retta: posto ciò, *l'inclinazione* scambievole *di due piani* si misura * dall'angolo che fanno fra loro le due perpendicolari condotte in ognuno di questi piani ad un medesimo punto dell'intersezione comune.

* P. 3.
* P. 17.

Quest'angolo può essere acuto, retto o ottuso.

5. Se è retto, i due *piani* saranno *perpendicolari* fra loro.

6. *L'angolo solido* è formato dalla riunione di parecchi angoli situati in differenti piani.

Così l'angolo solido S è formato dalla riunione degli angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA. F. 199.

Sono necessari almeno tre angoli piani per formare un angolo solido.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Una linea retta non può essere in parte in un piano e in parte fuori.

Poichè, secondo la definizione del piano, subito che una linea retta ha due punti comuni con un piano, essa è tutta intiera in un tal piano.

Corollario. Dunque per riconoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in differenti sensi su questa superficie, e vedere se essa tocca la superficie in tutta la sua estensione.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Due linee rette che si tagliano sono in un medesimo piano, e ne determinano la posizione.

Siano AB, AC due linee rette che si tagliano in A: si può concepire un piano ove si trova la linea retta AB: se si fà girare questo piano intorno ad AB, finchè passi per il punto C, allora la linea AC, che ha due dei suoi punti A e C in questo piano, vi sa- F. 181.

rà tutta intiera; dunque la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di passare per le due rette AB, AC.

Corollario I. Dunque un triangolo ABC, o tre punti A, B, C non in linea retta, determinano la posizione d'un piano.

F. 182. *Corollario II.* Dunque anche due parallele AB, CD determinano la posizione d'un piano: perchè se si conduce la segante EF, il piano delle due rette AE, EF, sarà quello delle parallele AB, CD.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.

Poichè, se nei punti comuni ai due piani, se ne trovassero tre che non fossero in linea retta, i due piani di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non farebbero che un solo e medesimo piano, il che è contro la supposizione.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

F. 183. *Se una linea retta* AP *è perpendicolare a due altre* PB, PC *che s'incrociano al suo piede nel piano* MN, *sarà perpendicolare a una retta qualunque* PQ *condotta dal suo piede nel medesimo piano, e perciò sarà perpendicolare al piano* MN.

Per un punto Q preso a volontà sopra PQ, tirate la retta BC nell'angolo BPC, in maniera che BQ=QC*, tirate AB, AQ, AC.

*Prob 5 L. III.

Essendo la base BC divisa in due parti uguali nel punto Q, il triangolo BPC darà *

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PQ}^2 + 2\overline{QC}^2.$$

* P. 14. L. III.

Il triangolo BAC darà parimente

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AQ}^2 + 2\overline{QC}^2.$$

Togliendo la prima equazione dalla seconda, e osservando che i triangoli rettangoli APC, APB danno $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2$, e $\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2$, si avrà

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2.$$

Dunque, prendendo le metà da ambe le parti, $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$, o $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$; dunque il triangolo APQ è rettangolo in P *; dunque AP è perpendicolare a PQ.

* P. 13. L. III.

Scolio. Si vede con ciò, che non solamente è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle che passano per il suo piede in un piano: ma che ciò accade tutte le volte che questa linea è perpendicolare a due rette condotte nel piano; ciò dimostra la legittimità della definizione I.

Corollario I. La perpendicolare AP è più corta di un obliqua qualunque AQ, dunque misura la vera distanza del punto A dal piano MN.

Corollario II. Da un punto P dato sopra un piano non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano: perchè, se si potesse alzare un altra perpendicolare diversa da AP, conducete per queste due perpendicolari un piano la di cui intersezione col

piano MN sia PQ: allora le due perpendicolari di cu si tratta sarebbero perpendicolari alla linea PQ al medesimo punto e nel medesimo piano, il che è impossibile.

È parimente impossibile d'abbassare da un punto dato fuori d'un piano due perpendicolari a questo piano: poichè, siano AP, AQ queste due perpendicolari, allora il triangolo APQ avrebbe due angoli retti APQ, AQP, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

F. 184. *Le oblique* AB, AC, AD ec. *ugualmente lontane dalla perpendicolare, sono uguali; e di due oblique* AD, AE *disugualmente lontane dalla perpendicolare, quella che se ne allontana di più* AE *è la maggiore.*

Poichè, essendo retti gli angoli APB, APC, APD, se si suppongono le distanze PB, PC, PD uguali fra loro, i triangoli APB, APC, APD avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali: dunque saranno uguali; dunque le ipotenuse o le oblique AB, AC, AD saranno uguali fra loro. Parimente se la distanza PE è maggiore di PD o della sua uguale PB, è chiaro che l'obliqua AE sarà maggiore di AB o della sua uguale AD.

Corollario. Tutte le oblique uguali AB, AC, AD ec. terminano alla circonferenza BCD descritta dal piede della perpendicolare P come centro; dunque essendo dato un punto B fuori d'un piano, se si vuol trovare su questo piano il punto P ove cadrebbe

la perpendicolare abbassata da A, bisogna segnare su questo piano tre punti B, C, D ugualmente lontani dal punto A e cercare in seguito il centro del circolo che passa per questi tre punti: questo centro sarà il punto cercato P.

Scolio. L' angolo ABP è ciò che si chiama *inclinazione dell' obliqua* AB *sul piano* MN, si vede che quest' inclinazione è uguale per tutte le oblique AB, AC, AD, ec. che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare, perchè tutti gli angoli ABP, ACP, ADP ec. sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Sia AP *una perpendicolare al piano* MN, BC *una linea situata in questo piano; se dal piede* P *della perpendicolare si abbassa* PD *perpendicolare sopra* BC, *e che si tiri* AD, *dico che* AD *sarà perpendicolare a* BC. F. 185.

Prendete DB=DC, e tirate PB, PC, AB, AC: poichè DB=DC, l'obliqua PB=PC; e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè PB=PC, l' obliqua AB=AC; dunque la linea AD ha due dei suoi punti A e D ugualmente distanti dalle estremità B e C; dunque AD e perpendicolare sul mezzo di PC.

Corollario. Si vede nel medesimo tempo che BC è perpendicolare al piano APD, poichè BC è perpendicolare a un tempo alle due rette AD, PD.

Scolio. Le due linee AP, BC offrono l'esempio di due linee che non si incontrano per-

chè non sono situate in un medesimo piano. La più corta distanza di queste linee è la retta PD che è ad un tempo stesso perpendicolare alla linea AP, e alla linea BC. La distanza PD è la più corta fra queste due linee; poichè, se si congiungono due altri punti, come A e B, la distanza AB è maggiore di AD: AD è maggiore di PD; dunque molto più AB>PD.

Si vede da ciò che essendo date nello spazio due linee AP, BC, che non sono situate nel medesimo piano, per avere la loro più corta distanza bisogna segnare sulla linea BC due punti B e C ugualmente distanti da un punto qualunque A preso sull'altra linea AP; in seguito segnare su questa i due punti A ed E ugualmente distanti da B; il mezzo di BC e il mezzo d'AE saranno i punti D e P, la di cui distanza è la più piccola.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

F. 186. *Se la linea* AP *è perpendicolare al piano* MN, *ogni linea* DE *parallela ad* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano.*

Per le parallele AP, DE conducete un piano la di cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN conducete BC perpendicolare a PD, e tirate AD.

Secondo il corollario del teorema precedente, BC è perpendicolare al piano APDE; dunque l'angolo BDE è retto: ma l'angolo EDP è retto pure, poichè AP è perpendico-

lare a PD, e DE è parallela ad AP, dunque la linea DE è perpendicolare alle due rette DP, DB dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario I. Reciprocamente se le rette AP, DE sono perpendicolari al medesimo piano MN, saranno parallele; poichè, se non lo fossero, conducete per il punto D una parallela ad AP, questa parallela sarà perpendicolare al piano MN; dunque si potrebbe da un medesimo punto D alzare due perpendicolari a un medesimo piano, il che è impossibile.

Corollario II. Due linee A e B parallele ad una terza C sono parallele fra loro, poichè imaginate un piano perpendicolare alla linea C, le linee A e B parallele a questa perpendicolare, saranno perpendicolari al medesimo piano; dunque, per il corollario precedente, saranno parallele fra loro: si suppone che le tre linee non siano in un medesimo piano, senza di che la proposizione sarebbe già nota.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Se la linea AB *è parallela a una retta* CD *condotta nel piano* MN, *sarà parallela a questo piano.* F. 187.

Poichè se la linea AB, che è nel piano ABCD, incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe essere che in qualche punto della linea CD, intersezione comune dei due piani: ora AB non può incontrare CD poichè gli è parallela; dunque non incontrerà nep-

pure il piano MN; dunque sarà parallela a questo piano.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

F. 188. *Due piani* MN, PQ *perpendicolari a una medesima retta* AB *sono paralleli fra loro.*

Poichè se s'incontrassero in qualche luogo, sia O uno dei loro punti comuni, e tirate OA, OB la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA condotta dal suo piede in questo piano: per la medesima ragione, AB è perpendicolare a BO dunque OA e OB sarebbero due perpendicolari abbassate dal medesimo punto O sulla medesima linea retta, il che è impossibile; dunque i piani MN, PQ non possono incontrarsi; dunque sono paralleli.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

F. 189. *Le intersezioni* EF, GH *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* FG, *sono parallele.*

Poichè, se le linee EF, GH situate in uno stesso piano non sono parallele, essendo prolungate s'incontreranno: dunque i piani MN, PQ ne' quali esse sono, s'incontrerebbero pure; dunque non sarebbero paralleli.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

F. 188. *La linea* AB *perpendicolare al piano* MN *è perpendicolare al piano parallelo* PQ.

Avendo tirato a piacere la linea BC nel piano PQ, per AB e BC conducete un piano ABC la di cui intersezione col piano MN sia AD, l'intersezione AD sarà parallela a BC: ma la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD; dunque sarà pure perpendicolare alla sua parallela BC: e poichè la linea AB è perpendicolare ad ogni retta BC condotta per il suo piede nel piano PQ, ne segue che è perpendicolare al piano PQ.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Le parallele EG, FH *comprese fra due piani paralleli* MN, PQ *sono uguali*. F. 189.

Per le parallele EG, FH fate passare il piano EGHF che incontrerà i piani paralleli in EF e GH. Le intersezioni EF, GH sono parallele, come pure EG, FH; dunque la figura EGHF è un parallelogrammo; dunque EG=FH.

Corollario. Segue da ciò, che *due piani paralleli sono da per tutto a ugual distanza*; poichè se EG e FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ saranno parallele fra loro; dunque saranno uguali.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Se due angoli CAE, DBF *non situati nello stesso piano hanno i loro lati paralleli, e diretti in un medesimo senso, questi angoli saranno uguali, e i loro piani paralleli*. F. 190.

Prendete AC=BD, AE=BF, e tirate CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è uguale e parallela a BD, la figura ABDC è un parallelogrammo *: dunque CD è uguale e parallela ad AB. Per una simil ragione EF è uguale e parallela ad AB: dunque ancora CD è uguale e parallela ad EF: la figura CEFD è dunque un parallelogrammo, e il lato CE è uguale e parallelo a DF; dunque i triangoli CAE, DBF sono equilateri fra loro, dunque l'angolo CAE=DBF.

* P. 32 L. I.

In secondo luogo, dico che il piano ACE è parallelo al piano BDF; poichè supponiamo che il piano parallelo a BDF condotto per il punto A incontri le linee EF, CD, in punti diversi da C ed E, per esempio in G e H: allora, secondo la proposizione XII, le tre linee AB, GD, FH saranno uguali: ma le tre AB, CD, EF lo sono già: dunque si avrebbe CD=GD, e FH=EF, il che è assurdo: dunque il piano ACE è parallelo a BDF.

Corollario. Se due piani paralleli MN, PQ sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF formati dalle intersezioni dei piani paralleli, saranno uguali: perchè l'intersezione AC è parallela a BD, AE a BF; dunque l'angolo CAE=DBF.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

F. 191. *Le parti di due rette comprese tra piani paralleli, sono proporzionali.*

Supponiamo che la linea AB incontri i piani paralleli MN, FQ, RS, in A, E, B, e che la linea CD incontri i medesimi piani in C, F, D; dico che si avrà AE : EB : : CF : FD.

Tirate AD che incontri il piano PQ in G, e conducete AC, EG, GF, BD: le intersezioni EG, BD dei piani paralleli PQ, RS col piano ABD sono parallele; dunque AE : EB : : AG : GD parimente essendo parallele le intersezioni AC, GF, si ha AG : GD : : CF : FD dunque a cagione del rapporto comune AG : GD, si avrà AE : EB : : CF : FD.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Sia ABCD *un quadrilatero qualunque situato o non situato in un medesimo piano, se si tagliano i lati opposti proporzionalmente con due rette* EF, GH, *talmenteche si abbia* AE : EB : : DF : FC, *e* BG : GC : : AH : HD; *dico che le rette* EF, GH *si taglieranno in un punto* M, *in maniera che si avrà* HM : MG : : AE : EB, *e* EM : MF : : AH : HD. F. 192.

Conducete per AD un piano qualunque A*b*H*c*D che non passi per GH: per i punti E, B, C, F conducete a GH le parallele E*e*, B*b*, C*c*, F*f*, che incontrino questo piano in *e*, *b*, *c*, *f*: si avrà primieramente a motivo delle parallele B*b*, GH, C*c* *, *b*H : H*c* : : BG : GC : : AH : HD; dunque * i triangoli AH*b*, *c*HD sono simili. Si avrà dipoi A*e* : *eb* : : AE : EB, e D*f* : *fc* : : DF :

* P. 15. L. III.

* P. 20. L. III.

FC; dunque $Ae : eb :: Df : fc$, o *componendo*, $Ae : Df :: Ab : Dc$ ma a motivo dei triangoli simili AHb, cHD, si ha $Ab : Dc :: AH : HD$; dunque $Ae : Df :: AH : HD$; d'altronde l'angolo $HAe = HDf$; dunque i triangoli AHe, DHf sono simili, e l'angolo $AHe = DHf$. Ne segue prima che eHf è una linea retta, e che perciò le rette EF, GH sono situate in un medesimo piano $EeFf$; dunque devono tagliarsi in un punto M. Dipoi, a cagione delle parallele Ee, MH, Ff, si avrà $EM : MF :: eH : Hf :: AH : HD$. Con una costruzione simile, facendo passare un piano per AB, si dimostrerebbe che $HM : MG :: AE : EB$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

F. 193. *L'angolo compreso fra' due piani* MAN, MAP *può esser misurato, conforme alla definizione, dall'angolo* NAP *che fanno fra loro le due perpendicolari* AN, AP *condotte in ciascuno di questi piani all'intersezione comune* AM.

Per dimostrare la legittimità di questa misura, bisogna provare 1.° che essa è costante, ossia che sarà la medesima in qualunque punto dell'intersezione comune si conducano le due perpendicolari.

In fatti se si prende un altro punto M, e si conducono MC nel piano MN, e MB nel piano MP perpendicolari all'intersezione comune AM; poichè MB ed AP sono perpendicolari a una medesima linea AM, saranno parallele fra loro. Per la medesima ragione

MC è parallela ad AN; dunque l'angolo BMC=PAN; dunque è indifferente il condurre le perpendicolari al punto M o al punto A; l'angolo compreso sarà sempre lo stesso.

2.° Bisogna provare che se l'angolo dei due piani cresce o diminuisce in un certo rapporto, l'angolo PAN aumenterà o diminuirà nel rapporto medesimo.

Descrivete col centro A e con un raggio a piacere l'arco NDP, col centro M e con un raggio uguale descrivete l'arco CEB, tirate AD a piacere; il piano MAD taglierà il piano MBC secondo la linea ME parallela ad AD, e l'angolo BME sarà uguale a PAD.

Chiamiamo per un momento *canto* l'angolo formato da' due piani MP, MN; posto ciò, se l'angolo DAP fosse uguale a DAN, è chiaro che il canto DAMP sarebbe uguale al canto DAMN, perchè la base DAP si situerebbe esattamente sulla sua uguale DAN, l'altezza AM sarebbe sempre la stessa dunque i due canti coinciderebbero l'uno coll'altro. Si vede del pari che se l'angolo DAP fosse contenuto un certo numero preciso di volte nell'angolo PAN, il canto DAMP sarebbe contenuto altrettante volte nel canto PAMN. D'altronde, dal rapporto in numeri intieri a un rapporto qualunque, la conclusione è legittima ed è stata dimostrata in un occasione intieramente simile *; dunque, qualunque sia il rapporto dell'angolo DAP all'angolo PAN, il canto DAMP sarà nel

Pr. 17. L. II.

medesimo rapporto col canto PAMN; dunque l' angolo NAP può esser preso per la misura del canto PAMN, o dell'angolo che fanno fra loro i due piani MAP, MAN.

Scolio. Quando due piani si traversano scambievolmente, si formano quattro angoli di cui gli opposti sono ugnali, e due adjacenti equivalgono a due angoli retti; dunque se un piano è perpendicolare ad un altro, questo secondo è pure perpendicolare al primo. Parimente nell'incontro dei piani paralleli con un terzo pianó, si avranno le medesime uguaglianze d'angoli e le medesime proprietà che nell'incontro di due linee parallele con una terza linea.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

F. 194. *Essendo la linea* AP *perpendicolare al piano* MN, *ogni piano* APB *condotto per* AP *sarà perpendicolare al piano* MN.

Sia BC l'intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si conduce DE perpendicolare a BP, la linea AP, essendo perpendicolare al piano MN sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE; ma l'angolo APD formato dalle due perpendicolari PA, PD all'intersezione comune BP è l'angolo dei due piani AB, MN; dunque, poichè quest'angolo è retto, i due piani sono perpendicolari fra loro.

Scolio. Quando tre rette come AP, BP, DP sono perpendicolari fra loro, ciascuna di queste linee è perpendicolare al piano

dell'altre due, e i tre piani sono perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Se il piano APB *è perpendicolare al piano* MN, *e se si conduca nel piano* APB *la linea* PA *perpendicolare all'intersezione comune* PB, *dico che* PA *sarà perpendicolare al piano* MN.

Poichè, se nel piano MN si conduce DP perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto, giacchè i piani sono perpendicolari fra loro: dunque la linea AP è perpendicolare alle due rette PB, PD: dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e per un punto P dell'intersezione comune si alza una perpendicolare al piano MN: dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB: poichè se non vi fosse, si potrebbe condurre nel piano AB la perpendicolare AP all'intersezione comune BP, la quale sarebbe nel medesimo tempo perpendicolare al piano MN; dunque al medesimo punto P vi sarebbero due perpendicolari al piano MN, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Se due piani AB, AD *sono perpendicolari a un terzo* MN, *la loro intersezione comune* AP *sarà perpendicolare a questo terzo piano*. F. 194.

Poichè, se per il punto P si alza una perpendicolare al piano MN, questa perpendi-

colare deve trovarsi a un tempo nel piano AB e nel piano AD; dunque è la loro comune intersezione AP.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

F. 195. *Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.*

Non v'è bisogno di dimostrare la proposizione, se non quando uno degli angoli piani è maggiore di ciascuno degli altri due. Sia dunque l'angolo solido S formato da tre angoli piani ASB, ASC, BSC, e supponiamo che l'angolo ASB sia il più grande di essi; dico che sarà ASB<ASC+BSC.

Nel piano ASB fate l'angolo BSD=BSC, tirate a piacere ADB; e avendo preso SC=SD, tirate AC, BC.

I due lati BS, SD sono uguali ai due BS, SC, l'angolo BSD=BSC; dunque i due triangoli BSD, BSC sono uguali: dunque BD=BC. Ma AB<AC+BC, togliendo da una parte BD, dall'altra BC, resterà AD<AC. I due lati AS, SD sono uguali ai due AS, SC, il terzo AD è minore del terzo AC; dunque * l'angolo ASD<ASC. Aggiungendo BSD=BSC, si avrà ASD+BSD, o ASB <ASC+BSC.

* P. 10. L. I.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

F. 196. *La somma degli angoli piani che formano un angolo solido è sempre minore di quattro angoli retti.*

Tagliate l'angolo solido S con un piano qualunque ABCDE; da un punto O preso in queso piano conducete a tutti gli angoli le linee OA, OB, OC, OD, OE.

Gli angoli di tutti i triangoli ASB, BSC, ec. formati intorno alla sommità S, presi insieme, equivalgono a tutti gli angoli d'un simil numero di triangoli AOB, BOC, ec., formati intorno la sommità O. Ma al punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme fanno l'angolo ABC minore della somma degli angoli ABS, SBC *; parimente al punto C si ha BCO+OCD<BCS+SCD, e così a tutti gli angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli la di cui sommità è in O tutti gli angoli alla base presi insieme sono minori di tutti gli angoli alla base dei triangoli la di cui sommità è in S; dunque in compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è uguale a quattro angoli retti; dunque la somma degli angoli piani che formano l'angolo solido S è minore di quattro angoli retti.

* P.20.

Scolio. Questa dimostrazione suppone che l'angolo solido sia *convesso*, ossia che il piano d'una faccia prolungato non possa mai tagliare l'angolo solido; se fosse altrimenti, la somma degli angoli piani non avrebbe più limiti, e potrebbe essere d'una grandezza qualunque.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

F. 197. *Se due angoli solidi sono composti di tre angoli piani respettivamente uguali, i piani nei quali sono gli angoli uguali saranno ugualmente inclinati fra loro.*

Sia l'angolo ASC=DTF, l'angolo ASB=DTE, e l'angolo BSC=ETF; dico che i due piani ASC, ASB avranno fra loro la medesima inclinazione dei due piani DTF, DTE.

Avendo preso SB a piacere, conducete BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O dove questa perpendicolare incontra il piano conducete OA, OC perpendicolari sopra SA, SC; tirate SO, AB, BC; prendete dipoi TE=SB; conducete EP perpendicolare sul piano DTF; dal punto P conducete PD, PF perpendicolari sopra TD, TF; infine tirate TP, DE, EF.

Il triangolo SAB è rettangolo in A, e il triangolo TDE in D *, e poichè l'angolo ASB=DTE, si ha pure SBA=TED. D'altronde SB=TE; dunque il triangolo SAB è uguale al triangolo TDE; dunque SA=TD, e AB=DE. Si dimostrerà similmente che SC=TF, e BC=EF. Posto ciò, il quadrilatero SAOC è uguale al quadrilatero TDPF; poichè ponendo l'angolo ASC sul suo uguale DTF, a cagione di SA=TD, e SC=TF, il punto A cadrà in D, e il punto C in F. Nel medesimo tempo AO perpendicolare a SA cadrà sopra DP perpendicolare a TD, e parimente OC sopra PF; dunque il punto

* P. 6.

O cadrà sul punto P, e si avrà AO=DP. Ma i triangoli AOB, DPE sono rettangoli in O e P, l'ipotenusa AB=DE, e il lato AO=DP; dunque questi triangoli sono uguali; dunque l'angolo OAB=PDE. L'angolo OAB è l'inclinazione dei due piani ASB, ASC, l'angolo PDE è quella dei due piani DTF, DTE; dunque queste due inclinazioni sono uguali fra loro.

Bisogna osservare nonostante che l'angolo A del triangolo rettangolo OAB non è propriamente l'inclinazione dei due piani ASB, ASC, se non quando la perpendicolare BO cade per rapporto a SA dalla medesima parte di SC; se cadesse dall'altra parte, allora l'angolo dei due piani sarebbe ottuso, e unito all'angolo del triangolo OAB farebbe due angoli retti. Ma nel medesimo caso, l'angolo dei due piani TDE, TDF sarebbe parimente ottuso, e unito all'angolo D del triangolo DPE farebbe due angoli retti; dunque siccome l'angolo A sarebbe sempre uguale a D, si conchiuderebbe parimente che l'inclinazione dei due piani ASB, ASC è uguale a quella dei due piani TDE, TDF.

Scolio. Se due angoli solidi sono composti di tre angoli piani respettivamente uguali, e se nel tempo stesso gli angoli uguali o omologhi sono *disposti nella stessa maniera* nei due angoli solidi, allora questi angoli solidi saranno uguali, e posti l'uno sull'altro coincideranno. In fatti si è già veduto che il quadrilatero SAOC può esser situato sul suo uguale TDPF; così situando SA so-

pra TD, SC cade sopra TF, e il punto O sul punto P. Ma a cagione dell' uguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicolare al piano ASC è uguale alla PE perpendicolare al piano TDF; di più queste perpendicolari sono dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la linea SB sopra TE, e i due angoli solidi coincideranno intieramente l'uno coll'altro.

Questa coincidenza però non ha luogo se non in quanto gli angoli piani uguali sono *disposti nella medesima maniera* nei due angoli solidi; poichè se gli angoli piani uguali fossero *disposti in un ordine inverso*, o, il che torna lo stesso, se le perpendicolari OB, PE invece d'esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, fossero dirette in senso contrario, allora sarebbe impossibile di far coincidere i due angoli solidi l'uno coll'altro. Non sarebbe però meno vero, conforme al teorema, che i piani nei quali sono gli angoli uguali sarebbero ugualmente inclinati fra loro; talmente che i due angoli solidi sarebbero uguali in tutte le loro parti costituenti, senza però potere essere soprapostí. Questa specie d'uguaglianza, che non è assoluta o di soprapposizione, merita d'esser distinta con una denominazione particolare: noi la chiameremo *uguaglianza per simmetria*. Così chiameremo *angoli uguali per simmetria*, o semplicemente *angoli simmetrici* i due angoli solidi di cui si tratta, che sono formati da tre angoli respettivamente uguali ma disposti in un ordine inverso.

La medesima osservazione si applica agli angoli solidi formati di più di tre angoli piani: così un angolo solido formato dagli angoli piani **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e un altro angolo solido formato dai medesimi angoli in un ordine inverso **A**, **E**, **D**, **C**, **B** possono essere tali che i piani nei quali sono gli angoli uguali siano ugualmente inclinati fra loro. Questi due angoli solidi, che sarebbero uguali senza che fosse possibile la sopraposizione, si chiameranno *angoli uguali per simmetria*, o *angoli simmetrici*.

Nelle figure piane non v'è *uguaglianza per simmetria* senza che vi sia nel tempo stesso uguaglianza assoluta, o di sopraposizione; la ragione n'è che si può rovesciare una figura piana, e prendere indifferentemente il disopra per il di sotto: accade diversamente nei solidi.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA

Essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido, trovare con una costruzione piana l'angolo che due di questi piani fanno fra loro. F. 198.

Sia S l'angolo solido già costruito, nel quale si conoscono i tre angoli piani ASB, ASC, BSC: si cerca l'angolo che fanno fra loro due di questi piani, per esempio, i piani ASB, ASC.

Imaginiamo che si sia fatta nell'angolo solido la stessa costruzione del teorema precedente, l'angolo OAB sarebbe l'angolo richiesto. Si tratta dunque di trovare il medesimo,

angolo con una costruzione piana o fatta sopra un piano.

A tal oggetto fate sopra un piano gli angoli B'SA, ASC, B''SC, uguali agli angoli BSA, ASC, BSC della figura solida; prendete B'S, e B''S uguali ciascuno a BS della figura solida: dai punti B', e B'' abbassate B'A e B''C perpendicolari sopra SA e SC, che s'incontrino in un punto O. Dal punto A come centro, e col raggio AB' descrivete la mezza-circonferenza B BE, al punto O alzate sopra AO la perpendicolare OB che incontra la circonferenza in B, tirate AB, e l'angolo EAB sarà l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo solido.

Tutto si riduce a far vedere che il triangolo AOB della figura piana è uguale al triangolo AOB della figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA sono rettangoli in A; gli angoli in S sono uguali; dunque gli angoli in B e B' sono parimente uguali. Ma l'ipotenusa SB' è uguale all'ipotenusa SB; dunque questi triangoli sono uguali: dunque SA della figura piana è uguale a SA della figura solida, ed anche AB' o la sua uguale AB nella figura piana è uguale ad AB nella figura solida. Si dimostrerà pure che SC è uguale dalle due parti; d'onde ne segue che il quadrilatero SAOC è uguale in ambedue le figure, e che così AO della figura piana è uguale ad AO della figura solida; dunque nell'una e nell'altra i triangoli rettangoli AOB hanno l'ipotenusa uguale e un lato uguale; dunque sono uguali, e l'angolo EAB

trovato colla costruzione piana è uguale all'inclinazione dei due piani SAB, SAC nell'angolo solido.

Quando il punto O cade fra A e B' nella figura piana, l'angolo EAB diventa ottuso, e misura sempre la vera inclinazione dei piani. Perciò si è indicata con EAB e non con OAB l'inclinazione richiesta, affinchè la medesima soluzione convenga a tutti i casi senza eccezione.

Scolio. Si potrebbe dimandare, se prendendo tre angoli a piacere, si potrà formare un angolo solido con questi tre angoli piani.

Primieramente bisogna che la somma dei tre angoli dati sia minore di quattro angoli retti senza di che l'angolo solido non può esser formato: bisogna di più che dopo aver preso due degli angoli a piacere B'SA, ASC, il terzo CSB″ sia tale che la perpendicolare B″C al lato SC incontri il diametro B'E fra le sue estremità B' ed E. Onde i limiti della grandezza dell'angolo CSB″ sono quelli che fanno andare la perpendicolare B″C ai punti B' ed E. Da questi punti abbassate sopra SC le perpendicolari B'I, EK, che incontrino in I e K la circonferenza descritta col raggio SB″, e i limiti dell'angolo CSB″ saranno CSI e CSK.

Ma nel triangolo isoscele B'SI, essendo la linea SC perpendicolare alla base B'I, si ha l'angolo CSI=CSB'=ASC+ASB'. E nel triangolo isoscele ESK, essendo la linea SC perpendicolare ad EK, si ha l'angolo CSK=

CSE. D' altronde, a cagione dei triangoli uguali ASE, ASB', l'angolo ASE=ASB'; dunque CSE o CSK=ASC--ASB'.

Risulta da ciò che il problema sarà possibile ogni volta che il terzo angolo CSB" sarà minore della somma degli altri due ASC, ASB', e maggiore della loro differenza; condizione che si accorda col teorema 20: poichè in virtù di un tal teorema bisogna che si abbia CSB' < ASC+ASB'; bisogna pure che sia ASC < CSB"+ASB', o CSB' > ASC —ASB'.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA

F. 198. *Essendo dati due dei tre angoli piani che formano un angolo solido, coll' angolo che i loro piani fanno fra loro, trovare il terzo angolo piano.*

Siano ASC, ASB' i due angoli piani dati, e supponiamo per un momento che CSB" sia il terzo angolo che si cerca: allora, facendo la medesima costruzione del problema precedente, l angolo compreso tra piani dei due primi sarebbe EAB. Ora nello stesso modo che si determina l'angolo EAB col mezzo di CSB" essendo dati gli altri due, così si può determinare CSB" col mezzo di EAB, il che risolverà il problema proposto.

Avendo preso SB' a piacere, abbassate sopra SA la perpendicolare indefinita B'E, fate l angolo EAB uguale all' angolo dei due piani dati, dal punto B ove il lato AB incontra la circonferenza descritta dal centro

A e col raggio AB' abbassate sopra AE la perpendicolare BO, e dal punto O abbassate sopra SC la perpendicolare indefinita OCB'', che terminerete in B'' in modo che SB''=SB'; l'angolo CSB'' sarà il terzo angolo piano richiesto.

Perchè se si facesse un angolo solido coi tre angoli piani B'SA, ASC, CSB'', l'inclinazione dei piani ove sono gli angoli dati ASB', ASC sarebbe uguale all'angolo dato EAB.

Scolio. Se un angolo solido è *quadruplo*, o F. 199. formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA, la cognizione di questi angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli dei loro piani; poichè coi medesimi angoli piani si potrebbe formare un infinità d'angoli solidi. Ma se si aggiunge una condizione, per esempio, se è data l'inclinazione dei due piani ASB, BSC, allora l'angolo solido è intieramente determinato, e si potrà trovare l'inclinazione di due qualunque dei suoi piani. In fatti imaginate un angolo solido *triplo* formato degli angoli piani ASB, BSC, ASC; i due primi angoli sono dati, come pure l'inclinazione dei loro piani; si potrà dunque determinare col problema presente il terzo angolo ASC. Dipoi, se si considera l'angolo solido *triplo* formato dagli angoli piani ASC, ASD, DSC, questi tre angoli sono cogniti, onde l'angolo solido è intieramente determinato. Ma l'angolo solido quadruplo è formato dalla riunione dei due angoli solidi tripli di cui parliamo;

dunque, poichè questi angoli parziali son noti e determinati, l'angolo totale sarà parimente noto e determinato.

L'angolo dei due piani ASD, DSC si troverebbe immediatamente col mezzo del secondo angolo solido parziale. In quanto all'angolo dei due piani BSC, CSD, bisognerebbe in un angolo solido parziale cercare l'angolo compreso fra i due piani BSC, ASC, e nell' altro l'angolo compreso fra i due piani ASC, DSC; la somma di questi due angoli sarebbe l angolo compreso fra i piani BSC, DSC.

Si troverà nella stessa maniera, che per determinare un angolo solido quintuplo, bisogna conoscere, oltre i cinque angoli piani che lo compongono, due delle inclinazioni scambievoli dei loro piani. Ne bisognerebbero tre nell' angolo solido sestuplo, e così in seguito.

LIBRO SESTO

I POLIEDRI

DEFINIZIONI

1. Si chiama *solido poliedro*, ò semplicemente *poliedro* ogni solido terminato da piani o faccie piane. (Questi piani sono necessaria-

mente terminati da linee rette.) Si chiama in particolare *tetraedro* il solido che ha quattro faccie: *essaedro* quello che ne ha sei; *ottaedro* quello che ne ha otto; *dodecaedro* quello che ne ha dodici; *icosaedro* quello che ne ha venti, ec.

Il tetraedro è il poliedro più semplice, perchè bisognano almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano un vuoto che deve esser chiuso da un quarto piano.

2. L' intersezione comune di due faccie adiacenti d' un poliedro si chiama *lato* o *costola* del poliedro.

3. Si chiama *poliedro regolare* quello di cui tutte le faccie sono poligoni regolari, uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro.

4. Il *prisma* è un solido compreso da diversi piani, di cui due opposti sono uguali e paralleli e gli altri sono parallelogrammi.

Siano per esempio i due poligoni uguali ABCDE, FGHIK situati in piani paralleli in maniera che i lati uguali siano nel tempo stesso paralleli; se si conduce un piano per i lati uguali e paralleli AB, FG, la figura ABGF sarà un parallelogrammo; sarà lo stesso dell'altre faccie BCHG, CDIH, ec. e il solido così formato sarà un prisma. F. 200.

5. I poligoni uguali e paralleli ABCDE, FGHIK, si chiamano le *basi del prisma*, le altre faccie prese insieme costituiscono ciò che si chiama la *superficie laterale*, o *convessa del prisma*.

6. L'*altezza d' un prisma* è la perpendicolare compresa fra i piani delle due sue basi.

7. Un *prisma* è *retto*, quando i lati AF, BG, ec., sono perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di questi lati è uguale all'altezza del prisma. In ogni altro caso il prisma è *obliquo* e l'altezza è minore del lato.

8. Un *prisma* è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, *esagono* ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec.

F. 206. 9. Il prisma che ha per base un parallelogrammo ha tutte le sue faccie parallelogramme; e si chiama *parallelepipedo*.

Il *parallelepipedo* è *rettangolo* quando tutte le sue faccie sono rettangoli.

10. Tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo* o essaedro regolare compreso da sei quadrati uguali.

F. 201. 11. La *piramide* è il solido che vien formato quando più piani triangolari si riuniscono da una parte in un medesimo punto S, e dall' altra terminano a un medesimo piano ABCDE.

Il poligono ABCDE si chiama la *base* della piramide, il punto S ne è la *sommità*, e il complesso dei triangoli ASB, BSC, ec. forma la *superficie convessa* della piramide.

12. L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dalla sommità sul piano della base, prolungato se bisogna.

13. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare* ec. secondo che la base e un triangolo, un quadrilatero, ec.

14. Una piramide è *regolare* quando la base è un poligono regolare, e nel tempo stesso la perpendicolare abbassata dalla sommità sul piano della base passa per il di lei centro. Questa linea si chiama allora l'*asse* della piramide.

15. *Diagonale* d'un poliedro è la linea condotta da un angolo a un altro.

16. Chiamerò *poliedri simmetrici* due poliedri che hanno una base comune, e che sono costruiti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, in modo che gli angoli solidi omologhi siano situati a uguali distanze dal piano della base sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Per esempio, se la retta ST è perpendicolare al piano ABC, e se nel punto O ove incontra questo piano sia divisa in due parti uguali, le due piramidi SABC, TABC che hanno la base comune ABC saranno due poliedri simmetrici F. 202.

17. Due *piramidi triangolari* sono *simili* quando hanno due faccie respettivamente simili, similmente poste ed ugualmente inclinate fra loro.

Così, supponendo gli angoli ABC=DEF, BAC=EDF, ABS=DET, BAS=EDT, se in oltre l'inclinazione dei piani ABS, ABC è uguale a quella dei loro omologhi DTE, DEF, le piramidi SABC, TDEF saranno simili. F. 203.

18. Avendo formato un triangolo con tre angoli presi sopra una medesima faccia o ba-

se d'un poliedro, si può imaginare che i differenti angoli solidi del poliedro fuori del piano di questa base siano le sommità di tante piramidi triangolari che hanno per base comune il triangolo indicato, e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascun angolo solido del poliedro per rapporto alla base. Posto ciò:

Due *poliedri* sono *simili* quando avendo basi simili, gli angoli solidi omologhi fuori di queste basi sono determinati da piramidi triangolari respettivamente simili.

N. B. Tutti i poliedri che noi consideriamo son poliedri cogli angoli in fuori; o poliedri *convessi*. Chiamiamo così quelli la di cui superficie non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti. In questa specie di poliedri il piano d'una faccia prolungato non può tagliare il solido; è dunque impossibile che il poliedro sia in parte al di sopra del piano d'una faccia, in parte al di sotto, esso è tutto da una medesima parte di un tal piano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Due poliedri non possono avere i medesimi angoli, e in numero uguale senza coincidere l'uno coll'altro. Per angoli s' intendono quì i punti situati alle loro sommità.

Poichè, supponiamo uno dei poliedri già costruito; se si vuol costruirne un altro che abbia i medesimi angoli e in numero uguale, bisognerà che i piani di questo non passino tutti per i medesimi angoli per cui passano nel primo, senza di che non differirebbero l'uno

dall'altro: ma allora è chiaro che alcuni dei nuovi piani taglierebbero il primo poliedro; vi sarebbero degli angoli solidi al di sopra di questi piani e degli angoli solidi al di sotto, il che non può convenire a un poliedro convesso: dunque se due poliedri hanno i medesimi angoli e in numero uguale, devono necessariamente coincidere. F. 204.

Scolio. Essendo dati di posizione i punti A, B, C, K, ec. che devono servire d' angoli solidi a un poliedro, è facile descrivere il poliedro.

Scegliete prima tre punti vicini D, E, H tali che il piano DEH passi. se ciò ha luogo, per dei nuovi punti K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, tutti al di sopra del piano o tutti al di sotto. Il piano DEH o DEHKC così determinato sarà una faccia del solido. Per uno di questi lati EH, conducete un piano che farete girare finchè incontri un nuovo angolo F, o più insieme F, I: avrete una seconda faccia che sarà FEH o FEHI. Continuate così facendo passare dei piani per i lati trovati finchè il solido sia terminato da tutte le parti· questo solido sarà il poliedro richiesto, perchè non ve ne sono due che possano passare per i medesimi angoli.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Due poliedri simmetrici hanno le faccie omologhe respettivamente uguali, e l'inclinazione di due faccie adiacenti in un poliedro è uguale all' inclinazione delle faccie omologhe nell' altro. F. 205.

Sia ABCDE la base comune ai due poliedri siano M e N due angoli solidi qualunque d'uno dei poliedri, M' e N' gli angoli omologhi dell'altro poliedro: bisognerà, secondo la definizione, che le rette MM', NN' siano perpendicolari al piano ABC e siano divise in due parti uguali ai punti m e n ove incontrano questo piano. Posto ciò, dico che la distanza MN è uguale a M'N'.

Poichè, se si fa girare il trapezio $mM'N'n$ intorno a mn finchè il suo piano si applichi sul piano $mMNn$, a cagione degli angoli retti in m e in n, il lato mM' cadrà sul suo uguale mM, e nN' sopra nN; dunque i due trapezj coincideranno, e si avrà MN=M'N'.

Sia P un terzo angolo del poliedro superiore, e P' il suo omologo nell'altro, si avrà pure MP=M'P', e NP=N'P'; dunque *il triangolo* MNP *che unisce tre angoli qualunque del poliedro superiore è uguale al triangolo* M'N'P' *che unisce i tre angoli omologhi dell'altro poliedro.*

Se tra questi triangoli si considerano soltanto quelli che sono formati alla superficie dei poliedri, si può già conchiudere che le superfici dei due poliedri sono composte d'un medesimo numero di triangoli respettivamente uguali.

Dico adesso che se alcuni triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie, e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l'altra superficie, e formeranno una faccia poligona uguale.

In fatti siano MPN, NPQ due triangoli adiacenti che si suppongono in uno stesso piano, e siano M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi. Si ha l'angolo MNP=M'N'P', l'angolo PNQ =P'N'Q'; e se si tirano MQ e M'Q' il triangolo MNQ sarebbe uguale a M'N'Q', perciò si avrebbe l'angolo MNQ=M'N'Q'. Ma, poichè MPNQ è un solo piano, si ha l'angolo MNQ=MNP+PNQ. Dunque si avrà pure M'N'Q'=M'N'P'+P'N'Q'. Or se i tre piani M'N'P', P'N'Q', M'N'Q' non fossero confusi in un solo, questi tre piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe* l'angolo M'N'Q'< M'N'P'+P'N'Q'. Dunque, poichè questa condizione non ha luogo, i due triangoli M'N'P', P'N'Q' sono in un medesimo piano.

* P. 20. L. V.

Segue da ciò che ciascuna faccia o triangolare o poligona d'un poliedro corrisponde a una faccia uguale nell'altro, e che perciò i due poliedri sono compresi da un medesimo numero di piani respettivamente uguali.

Resta a provare che l'inclinazione di due faccie adiacenti qualunque in uno dei poliedri è uguale all'inclinazione delle due faccie omologhe nell'altro.

Siano MPN, NPQ due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due faccie adiacenti; siano M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi: si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ, MNP, PNQ, e in N' un angolo solido formato dai tre M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'. Ora questi angoli piani sono respettivamente uguali; dunque l'inclinazione dei due piani MNP,

PNQ è uguale a quella dei loro omologhi M'N'P', P'N'Q'.

Dunque nei poliedri simmetrici le faccie sono respettivamente uguali, come pure le inclinazioni dei loro piani.

Corollario. Poichè le parti costituenti d'un solido, angoli, lati, inclinazioni di faccie sono uguali alle parti costituenti dell'altro, si può conchiudere che *due poliedri simmetrici sono uguali sebbene non possono essere sopraposti*. Perchè non v'è altra differenza nei due solidi se non quella della posizione delle parti, la quale non è essenziale alla grandezza di queste parti medesime.

Scolio. Si può osservare che gli angoli solidi di un poliedro sono simmetrici cogli angoli solidi dell'altro poliedro: poichè se l'angolo solido N è formato dai piani MNP, PNQ, QNR, ec. il suo omologo N' è formato dai piani M'N'P', P'N'Q', Q'N'R', ec.; questi sono disposti nel medesimo ordine degli altri. Ma siccome i due angoli solidi sono in una situazione inversa l'uno per rapporto all'altro, ne segue che la disposizione reale dei piani che formano l'angolo solido N' è l'inversa di quella che ha luogo nell'angolo omologo N. D'altronde le inclinazioni dei piani consecutivi sono uguali nell'uno e nell'altro angolo solido. Dunque gli angoli solidi sono simmetrici l'uno coll'altro. Vedete lo scolio della prop. XXII., lib. V.

Quest'osservazione prova che un poliedro qualunque non può avere che un solo poliedro simmetrico. Poichè se si costruisse so-

pra un altra base un nuovo poliedro simmetrico col poliedro dato, gli angoli solidi di questo sarebbero sempre simmetrici cogli angoli del poliedro dato. Dunque sarebbero uguali a quelli del poliedro simmetrico costruito sulla prima base. D'altronde le faccie omologhe sarebbero sempre uguali. Dunque i poliedri simmetrici costruiti sopra una base o sopra un altra avrebbero le faccie uguali, e gli angoli solidi uguali: dunque coinciderebbero mediante la sopraposizione, e formerebbero un solo e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due prismi sono uguali allorchè hanno un angolo solido compreso fra tre piani respettivamente uguali e similmente posti.

Sia la base ABCDE uguale alla base *abcde*, il parallelogrammo ABGF uguale al parallelogrammo *abgf*, e il parallelogrammo BCHG uguale al parallelogrammo *bchg*; dico che il prisma ABCI sarà uguale al prisma *abci*. F. 200.

Poichè, sia situata la base ABCDE sulla sua uguale *abcde*, queste due basi coincideranno; ma i tre angoli piani che formano l'angolo solido B sono respettivamente uguali ai tre angoli piani che formano l'angolo solido *b*, cioè ABC=*abc*, ABG=*abg*, e GBC=*gbc*, di più questi angoli sono similmente posti; dunque gli angoli solidi B e *b* sono uguali, e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo uguale *bg*. Si vede pure che

a cagione dei parallelogrammi uguali ABGF, *abgf*, il lato GF cadrà sul suo uguale *gf*, e similmente GH sopra *gh*; dunque la base superiore FGHIK coinciderà intieramente colla sua uguale *fghik*, e i due solidi saranno confusi in un solo, poichè avranno i medesimi angoli solidi *. Dunque due prismi sono uguali ec.

* P. 1.

Scolio. Un prisma è intieramente determinato quando si conosce la sua base ABCDE, ed è data la costola BG di grandezza e di posizione. Poichè, se per il punto G si conduce GF uguale e parallela ad AB, GH uguale e parallela a BC, e se nel piano FGH parallelo ad ABC si descrive il poligono FGHIK uguale ad ABCDE, è chiaro che saranno determinati tutti gli angoli del prirma. Dunque due prismi costruiti colli stessi dati non possono essere disuguali; il che conferma la proposizione che abbiamo dimostrato.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

In ogni parallelepipedo i piani opposti sono uguali e paralleli.

F. 206.

Poichè, secondo la definizione di questo solido, le basi ABCD, EFGH sono parallelogrammi uguali, e i loro lati sono paralleli; resta dunque a dimostrare che la medesima cosa ha luogo per due faccie laterali opposte come AEHD, BFGC. Ora AD è uguale e parallela a BC, giacchè la figura ABCD è un parallelogrammo; per una simil ragione AE è uguale e parallela a BF. Dunque l'an-

golo DAE è uguale all'angolo CBF *, e il piano DAE parallelo a CBF. Dunque anche il parallelogrammo DAEH è uguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà del pari che i parallelogrammi ABFE, DCGH sono uguali e paralleli. Dunque in ogni parallelepipedo ec.

* P. 13. L. V.

Corollario. Poichè il parallelepipedo è un solido compreso da sei piani di cui gli opposti sono uguali e paralleli, ne segue che una faccia qualunque e la sua opposta possono essere prese per le basi del parallelepipedo.

Scolio. Essendo date tre rette AB, AE, AD non situate nello stesso piano e che facciano fra loro degli angoli dati, si può su queste tre rette costruire un parallelepipedo AG; a tal effetto bisogna condurre dall'estremità di ciascuna retta un piano parallelo al piano dell'altre due, cioè per il punto B un piano parallelo a DAE, per il punto D un piano parallelo a BAE, e per il punto E un piano parallelo a BAD. Gli incontri scambievoli di questi piani formeranno il parallelepipedo richiesto AG.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti sono simmetrici, e le diagonali condotte da questi angoli si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

F. 206.

Paragoniamo, per esempio, l'angolo solido A al suo opposto G: l'angolo EAB ugua-

le ad EFB è pure uguale a HGC, l'angolo DAE=DHE=CGF, e l' angolo DAB=DCB=HGF. Dunque i tre angoli piani che formano l'angolo solido A sono respettivamente uguali ai tre che formano l'angolo solido G. Ma siccome sono disposti differentemente nei due angoli solidi, ne segue che questi due angoli A e G sono simmetrici l'uno coll' altro *.

* P. 22. L. V.

In secondo luogo imaginiamo due diagonali qualunque EC, AG condotte da angoli opposti. Poichè AE è uguale e parallela a CG, la figura AEGC è un parallelogrammo; dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scambievolmente in due parti uguali. Ma la diagonale EC e un altra DF si taglieranno pure in due parti uguali; dunque il mezzo d'una diagonale è il mezzo dell'altre tre, e per conseguenza le quattro diagonali si taglieranno in due parti uguali in un medesimo punto che si può riguardare come il centro del parallelepipedo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

F. 207. *Il piano* BDHF *che passa per due costole parallele opposte* BF, DH *divide il parallelepipedo* AG *in due prismi triangolari* ABDHEF, GHFBCD *simmetrici l'uno coll' altro*.

In primo luogo questi due solidi son prismi, perchè i triangoli ABD, EFH hanno i loro lati uguali e paralleli; dunque sono uguali, e nel tempo stesso le faccie laterali ABFE, ADHE, BDHF sono parallelogrammi; dun-

que il solido ABDHEF è un prisma; lo stesso è del solido GHFBCD. Dico adesso che questi due prismi sono simmetrici.

Sulla base ABD fate il prisma ABDE'F'H' che sia simmetrico col prisma ABDEFH. Secondo ciò che è stato dimostrato *, il piano ABF'E' è uguale ad ABFE, e il piano ADH'E' è uguale ad ADHE: ma se si paragona il prisma GHFBCD al prisma ABDH'E'F', la base GHF è uguale ad ABD, il parallelogrammo GHDC che è uguale ad ABFE è pure uguale ad ABF'E', e il parallelogrammo GFBC=ADHE=ADH'E'. Dunque i tre piani che formano l'angolo solido G nel prisma GHFBCD sono uguali respettivamente ai tre piani che formano l'angolo solido A nel prisma ABDH'E'F'; d'altronde sono disposti similmente. Dunque questi due prismi sono uguali, * e potrebbero essere soprapposti. Ma uno di essi, ABDH'E'F' è simmetrico col prisma ABDHEF; dunque l'altro GHFBCD è pure simmetrico con ABDHEF.

* P. 2.

* P. 3.

Corollario. Un prisma triangolare qualunque ABDHEF è la metà del parallelepipedo costruito sulle tre costole AB, AD, AE che si riuniscono a un medesimo angolo A; sarebbe pure la metà del parallelepipedo costruito sulle altre tre costole BA, BC, BF.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

F. 208. e 209.

Se due parallelepipedi AG, AL *hanno la base comune* ABCD, *e se le loro basi superiori* EFGH, IKLM *siano comprese in un mede-*

simo piano e tra le medesime parallele EK, HL, *questi due parallelepipedi saranno equivalenti fra loro.*

Possono accadere tre casi, di cui due sono rappresentati dalle figure 208 e 209, e il terzo avrebbe luogo se FG si confondesse con IM, ma la dimostrazione è la medesima, per tutti. E in primo luogo dico che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

In fatti, poichè AE è parallela a BF, e HE a GF, l'angolo AEI=BFK, HEI=GFK, e HEA=GFB. I tre angoli piani che formano l'angolo solido E sono dunque respettivamente uguali ai tre angoli piani che formano l'angolo solido F, e di più sono disposti nella medesima maniera; dunque questi due angoli solidi sono uguali. Adesso se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e prima la base AEI sulla base BFK, queste due basi essendo uguali coincideranno, e poichè l'angolo solido E è uguale all'angolo solido F, il lato EH cadrà sul suo uguale FG. Non bisogna altro di più per provare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perchè la base AEI e la costola EH determinano il prisma AEM, come la base BFK e la costola FG determinano il prisma BFL *. Dunque questi due prismi sono uguali.

* P. 3.

Ma se dal solido AEL si toglie il prisma AEM resterà il parallelepipedo AIL; e se dallo stesso solido AEL si toglie il prisma BFL, resterà il parallelepipedo AEG. Dunque i due parallelepipedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Due parallelepipedi della medesima base, e della medesima altezza sono equivalenti fra loro. F. 210.

Sia ABCD la base comune ai due parallelepipedi AG, AL; poichè hanno la medesima altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM saranno sul medesimo piano. Di più i lati EF ed AB sono uguali e paralleli, come pure IK ed AB; dunque EF è uguale e parallela ad IK; per una simil ragione GF è uguale e parallela a LK. Siano prolungati i lati EF, HG, ed ancora LK, IM, finchè gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ; è chiaro che questo parallelogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Ora se si imagina un terzo parallelepipedo che colla medesima base inferiore ABCD abbia per base superiore NOPQ, questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AG *, poichè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori sono comprese fra le parallele HP, EO. Per la medesima ragione questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AL. Dunque i due parallelepipedi AG, AL che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono equivalenti fra loro.

* P. 7.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

F. 210. e 211. *Ogni parallelepipedo può esser cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente che avrà la medesima altezza e una base equivalente.*

Sia AG il parallelepipedo proposto: dai punti A, B, C, D, conducete AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base: formerete così il parallelepipedo AL equivalente al parallelepipedo AG, e le di cui faccie laterali AK, BL, ec. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il parallelepipedo rettangolo equivalente F. 211. al parallelepipedo proposto AG. Ma se ABCD non è un rettangolo, conducete AO, e BN perpendicolari sopra CD, dipoi OQ e NP perpendicolari sopra la base, avrete il solido ABNOIKPQ che sarà un parallelepipedo rettangolo. In fatti, per costruzione, la base ABON e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; le faccie laterali son pur tali, poichè le costole AI, OQ, ec. sono perpendicolari al piano della base: dunque il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Ma i due parallelepipedi AP, AL possono considerarsi come costruiti sulla medesima base ABKI, F. 210. e colla medesima altezza AO: dunque sono equivalenti: dunque il parallelepipedo AG che era stato prima cangiato un parallelepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente AP, che ha la medesima altezza AI,

e la di cui base ABNO è equivalente alla base ABCD.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Ogni sezione NOPQR *fatta in un prisma, parallelamente alla base* ABCDE *è uguale a questa base.* F. 200.

Poichè, le parallele AN, BO, CP, ec. comprese fra' piani paralleli ABC, NOP sono uguali; e perciò tutte le figure ABON, BCPO, ec. sono parallelogrammi. Da ciò ne segue che il lato ON è uguale ad AB, OP a BC, QP a CD, ec. Di più i lati uguali sono paralleli: dunque l'angolo ABC=NOP, l'angolo BCD=OPQ, ec. Dunque i due poligoni ABCDE, NOPQR hanno i lati e gli angoli respettivamente uguali; dunque sono uguali.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Due parallelepipedi rettangoli AG, AL *che hanno la medesima base* ABCD *stanno fra loro come le loro altezze* AE, AI. F. 212.

Supponiamo primieramente che le altezze AE, AI stiano fra loro come dei numeri interi, per esempio come 15 stà a 8. Si dividerà AE in 15 parti uguali, di cui AI ne conterrà 8; e per i punti di divisione x, y, z, ec. si condurranno dei piani paralleli alla base. Questi piani divideranno il solido AG in 15 parallelepipedi parziali che saranno tutti uguali fra loro, perchè avranno basi

uguali, e altezze uguali: basi uguali, perchè ogni sezione come MIKL fatta in un prisma parallelamente alla sua base ABCD è uguale a questa base; altezze uguali, perchè queste altezze sono le divisioni stesse Ax; xy, yz, ec. Ora di questi 15 parallelepipedi, 8 sono contenuti in AL; dunque il solido AG stà al solido AL come 15 stà a 8, o in generale come l'altezza AE stà all' altezza AI.

In secondo luogo se il rapporto d'AE ad AI non può esprimersi in numeri, dico che sarà ugualmente *solid.* AG : *solid.* AL :: AE : AI. Poichè se questa proporzione non ha luogo, supponiamo che si abbia *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO. Dividete AE in parti uguali, di cui ciascuna sia minore di OI, vi sarà almeno un punto di divisione m fra O ed I. Sia P il parallelepipedo che ha per base ABCD e per altezza Am; poichè le altezze AE, Am, stanno fra loro come due numeri intieri, si avrà *sol.* AG : P :: AE : Am Ma si ha per ipotesi *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO; da ciò resulta *sol.* AL : P :: AO : Am. Ma AO è maggiore di Am; dunque bisognerebbe perchè la proporzione avesse luogo, che il solido AL fosse maggiore di P: ora al contrario è minore: dunque è impossibile che il quarto termine della proporzione *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : X, sia una linea AO maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che il quarto termine non può essere minore di AI dunque è uguale ad AI. Dunque i parallelepipedi rettangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Due parallelepipedi rettangoli AG, AK *che* F. 213.
hanno la medesima altezza AE, *stanno fra loro come le loro basi* ABCD, AMNO.

Avendo situato i due solidi uno accanto dell'altro, come la figura gli rappresenta, prolungate il piano ONKL finchè incontri il piano DCGH in PQ, avrete un terzo parallelepipedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei parallelepipedi AG, AK. I due solidi AG, AQ avendo la medesima base AEHD stanno fra loro come le loro altezze AB, AO; parimente, i due solidi AQ, AK avendo la medesima base AOLE stanno fra loro come le loro altezze AD, AM. Perciò si avranno le due proporzioni

sol. AG : *sol.* AQ :: AB : AO,
sol. AQ : *sol.* AK :: AD : AM.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AQ, si avrà

sol. AG : *sol.* AK :: AB×AD : AO×AM.

Ma AB×AD rappresenta la base ABCD, e AO×AM rappresenta la base AMNO; dunque due parallelepipedi rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per F. 213.

le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Poichè, avendo situato i due solidi AG, AZ in maniera che abbiano un angolo comune BAE, prolungate i piani necessari per formare il terzo parallelepipedo AK della medesima altezza col parallelepipedo AG. Si avrà per la proposizione precedente

sol. AG : *sol.* AK : : ABCD : AMNO.

Ma i due parallelepipedi AK, AZ che hanno la medesima base AMNO, stanno fra loro come le loro altezze AE, AX: onde si ha

sol. AK : *sol.* AZ : : AE : AX.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AK, si avrà

*sol.*AG : *sol.*AZ : : ABCD×AE : AMNO×AX.

In vece di ABCD ed AMNO si può mettere AB×AD ed AO×AM, il che darà

*sol.*AG : *sol.*AZ : : AB×AD×AE : AO×AM×AX.

Dunque due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro ec.

Scolio. Da ciò segue che si può prendere per misura d'un parallelepipedo rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, o il prodotto delle sue tre dimensioni. Su questo principio valuteremo tutti gli altri solidi.

Per l'intelligenza di questa misura bisogna rammentarsi che s'intende per prodotto di due o di più linee il prodotto dei numeri che rappresentano tali linee, e questi numeri dipendono dall'unità lineare che si può prendere a piacere. Posto ciò, il prodotto delle tre dimensioni d'un parallelepipedo è un nu-

mero che non significa niente in se stesso, e che sarebbe differente se si fosse presa un'altra unità lineare. Ma se si moltiplicano parimente le tre dimensioni d'un altro parallelepipedo, valutandole sulla medesima unità lineare, i due prodotti staranno fra loro come i solidi, e daranno l'idea della loro grandezza relativa.

La grandezza d'un solido, il suo volume, o la sua estensione, si chiamano altrimenti la sua *solidità*, e la parola *solidità* è impiegata particolarmente per indicare la misura d'un solido. Così si dice che la solidità d'un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, o al prodotto delle sue tre dimensioni.

Essendo le tre dimensioni del cubo uguali fra loro, se il lato è 1, la solidità sarà $1\times1\times1$, o 1; se il lato è 2, la solidità sarà $2\times2\times2$, o 8; se il lato è 3, la solidità sarà $3\times3\times3$, o 27, e così in seguito; così essendo i lati dei cubi come i numeri 1, 2, 3, ec., i cubi stessi o le loro solidità stanno come i numeri 1, 8, 27, ec. Perciò in aritmetica si chiama *cubo* d'un numero il prodotto che risulta da tre fattori uguali a questo numero.

Se si proponesse di fare un cubo doppio d'un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo cercato fosse al lato del cubo dato come la radice cuba di 2 è all'unità. Ora si trova facilmente con una costruzione geometrica la radice quadrata di 2, ma non si può trovare ugualmente la sua radice cubica, almeno colle operazioni della geometria ele-

mentare le quali consistono in impiegare solamente linee rette di cui si conoscono due punti, e circoli di cui sono determinati i centri e i raggi.

Per motivo di questa difficoltà il problema della *duplicazione del cubo* è stato celebre fra gli antichi geometri, come quello della *trisezione dell' angolo* che è presso a poco del medesimo ordine.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

La solidità d' un parallelepipedo e in generale la solidità d' un prisma qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè, 1° un parallelepipedo qualunque è equivalente a un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza e di base equivalente *. Ora la solidità di questo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

* P. 9.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà d'un parallelepipedo della medesima altezza e di base doppia *. Ora la solidità di questo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è uguale al prodotto della sua base metà di quella del parallelepipedo moltiplicata per la sua altezza.

* P. 6.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti triangoli si possono formare nel poligono che gli serve di base. Ma la soli-

dità d'ogni prisma triangolare è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà uguale alla somma di tutti i triangoli che servono loro di basi, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità d'un prisma poligono qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. Se si paragonano due prismi che abbiano la medesima altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi. Dunque *due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi*; per una simil ragione *due prismi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze*.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Se una piramide SABCDE *è tagliata da un piano* abe *parallelo alla base*, F. 214.

1.° *I lati* SA, SB, SC, *ec. e l'altezza* SO, *saranno tagliati proporzionalmente* in a, b, c, *ec. ed* o;

2.° *La sezione* abcde *sarà un poligono simile alla base* ABCDE.

Poichè 1.° essendo paralleli i piani ABE, *abe*, le loro intersezioni AB, *ab* con un terzo piano SAB saranno parallele *; dunque i triangoli SAB, *sab*, sono simili, e si ha la proporzione SA : *Sa* :: SB : *Sb*; si avrebbe pure SB : *Sb* :: SC : *Sc*, e così in seguito. Dunque tutti i lati SA, SB, SC, ec. sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*, ec.

* P. 10. L. V.

L'altezza SO è tagliata nella medesima proporzione al punto *o*; perchè BO, e *bo* sono parallele, e però si ha SO : *So* :: SB : *Sb*.

2.° Poichè *ab* è parallela ad AB, *bc* a BC, *cd* a CD, ec. l'angolo *abc*=ABC, l'angolo *bcd*=BCD, e così in seguito. Di più, a cagione dei triangoli simili SAB, S*ab*, si ha AB : *ab* :: SB : *Sb*; e a cagione dei triangoli simili SBC, *Sbc*, si ha SB : *Sb* :: BC : *bc*; dunque AB : *ab* :: BC : *bc*; si avrebbe pure BC : *bc* :: CD : *cd*, e così in seguito. Dunque i poligoni *ab..de*, ABCDE hanno gli angoli uguali e i lati omologhi proporzionali; dunque sono simili.

Corollario. Siano SABCDE, SXYZ due piramidi, la di cui sommità è comune, e le di cui basi sono sopra un medesimo piano talmente che hanno la medesima altezza: se si tagliano con un piano parallelo al piano delle basi, sia *abcde* la sezione fatta in una piramide, *xyz* la sezione fatta nell'altra; dico che *le sezioni abcde, xyz staranno fra loro come le basi* ABCDE, XYZ.

Poichè essendo simili i poligoni ABCDE, *abcde*, le loro superfici stanno come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; ma AB : *ab* :: SA : *Sa*; dunque ABCDE : *abcde* :: $\overline{SA}^2$: $\overline{Sa}^2$. Per la medesima ragione XYZ : *xyz* :: $\overline{SX}^2$: $\overline{Sx}^2$. Ma poichè *abcxyz* è un solo piano, si ha pure SA : *Sa* :: SX : *Sx*; dunque ABCDE : *abcde* :: XYZ : *xyz*. Dunque le sezioni *abcde*, *xyz* stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ.

PROPOSIZIONE XVI.

LEMMA

Sia SABC *una piramide triangolare di cui* S *è la sommità e* ABC *la base*; *avendo preso a piacere* $SP < SA$, *determinate successivamente* SQ, SR, SV, ec. *in maniera che si abbia la progressione geometrica* SA : SP : : SP : SQ : : SQ : SR : : SR : SV, *e così all' infinito : per il punto* P *fate passare il piano* PED *parallelo alla base, e finalmente conducete* BG, CF, IE, HD *parallele ad* AP, *avrete due prismi triangolari* ABCFPG, AHIEPD *uno maggiore, l' altro minore della porzione di piramide* ABCEPD *che corrisponde alla divisione* AP: *supponiamo che si siano formati dei prismi simili a ciascuna dell' altre divisioni* PQ, QR, RV, ec: *posto ciò*, F. 215.

1.° *Ciascun prisma* ABCFPG *che si può chiamare* prisma eccedente *stà al prisma* AHIEPD *che si può chiamare* prisma deficiente, *come il quadrato di* SA *stà al quadrato di* SP.

2.° *La somma di tutti i prismi eccedenti stà alla somma di tutti i prismi deficienti parimente* : : $\overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$.

In fatti, 1.° i due prismi eccedente e deficiente hanno la medesima altezza, stanno dunque fra loro come le loro basi ABC, AHI. Essendo queste basi triangoli simili, si ha ABC : AHI : : $\overline{AB}^2 : \overline{AH}^2$, o $\overline{PD}^2$; ma essendo PD parallela ad AB, si ha AB : PD : :

$SA : SP$, o $\overline{AB}^2 : \overline{PD}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$. Dunque il prisma eccedente PABC stà al prisma deficiente PAHI come $\overline{SA}^2$ stà a $\overline{SP}^2$.

2.° Si dimostrerà parimente che i prismi eccedente e deficiente che corrispondono alla divisione PQ, stanno fra loro come $\overline{SP}^2$ stà a $\overline{SQ}^2$. Ma per supposizione $SA : SP :: SP : SQ$, o $\overline{SP}^2 : \overline{SQ}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$; dunque i prismi eccedente e deficiente che corrispondono alla divisione PQ stanno fra loro come $\overline{SA}^2$ stà a $\overline{SP}^2$. Questo medesimo rapporto sussisterà in tutte le divisioni; onde si avrà una serie di rapporti uguali nei quali i prismi eccedenti saranno antecedenti, e i prismi deficienti saranno conseguenti. Donde ne segue che la somma di tutti i prismi eccedenti stà alla somma di tutti i prismi deficienti come un antecedente stà al suo conseguente, o come il quadrato di SA stà al quadrato d: SP.

Corollario. Se si considera un altra piramide SXYZ che abbia la medesima sommità e la medesima altezza, talmente che le basi ABC, XYZ siano in un medesimo piano, essendo divisa questa seconda piramide come la prima coi medesimi piani che passano per i punti P, Q, R, ec., ed essendo parimente formati ad ogni divisione i prismi eccedenti, e deficienti; dico che *la somma dei prismi eccedenti o deficienti in una piramide stà alla somma dei prismi dello stesso nome nell' al-*

tra, come la base della prima stà alla base della seconda.

Poichè, due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, ora due sezioni fatte dal medesimo piano nelle due piramidi stanno fra loro come le loro basi *. * P. 15. Dunque ciascun prisma eccedente o deficiente in una piramide stà al suo corrispondente del medesimo nome nell'altra come la base della prima stà alla base della seconda. Dunque la somma dei prismi eccedenti o deficienti nell'una stà alla somma dei prismi del medesimo nome nell'altra come la base della prima stà alla base della seconda.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Due piramidi triangolari della medesima altezza SABC, SXYZ *stanno fra loro come le loro basi* ABC, XYZ. F. 215.

Se si nega questa proposizione, la piramide SABC starà alla piramide SXYZ come la base ABC stà ad una superficie K maggiore o minore di XYZ. Supponiamo in primo luogo K>XYZ, e sul lato SA prendiamo il punto P in maniera che sia

$$K : XYZ :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2.$$

Dividiamo il lato SA nei punti Q, R, ec. talmente che si abbia la progressione SA : SP :: SP : SQ :: SQ : SR, ec. all'infinito. Per i punti P, Q, R, ec. conduciamo dei piani paralleli alla base, e formiamo come si è detto di sopra dei prismi eccedenti e deficienti all'infinito nelle due piramidi.

Sia D la somma dei prismi deficienti, ed E la somma dei prismi eccedenti nella piramide SABC; siano *d* ed *e* le somme simili nell'altra piramide. Posto ciò, si avrà in virtù di ciò che precede, le quattro proporzioni seguenti, cioè,

Per supposizione $SABC : SXYZ :: ABC : K$.
Per costruzione $K : XYZ :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$.
Per il lemma prec. $E : D :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$.
Per il suo corollario $E : e :: ABC : XYZ$.

La seconda e la terza danno $E : D :: K : XYZ$; questa avendo i medesimi estremi della quarta, i medi daranno $D : e :: ABC : K$. Finalmente, paragonando questo resultato colla prima, si avrà

$$SABC : SXYZ :: D : e.$$

Ora D è minore di SABC, e al contrario *e* è maggiore di SXYZ; dunque questa proporzione non può aver luogo. Dunque è impossibile che la piramide SABC stia alla piramide SXYZ come la base ABC stà a un quarto termine K maggiore di XYZ.

Supponiamo in secondo luogo $K < XYZ$, allora si avrebbe la proporzione: SXYZ sta ad SABC come una superficie minore di XYZ sta ad ABC, o come XYZ sta ad una superficie maggiore di ABC. Ma è chiaro che lo stesso ragionamento impiegato nella prima supposizione si applicherebbe a questa cangiando soltanto le piramidi una per l'altra: e in fatti dal primo ragionamento si poteva conchiudere in generale, che una piramide non può stare a una piramide della amedesima altezza come la base della prim

stà a una quantità maggiore della base della seconda. Da ciò ne segue, che questa seconda supposizione è assurda quanto la prima, e che perciò il quarto termine della proporzione di cui si tratta non può essere nè maggiore nè minore di XYZ. Dunque è uguale a XYZ. Dunque SABC : SXYZ : : ABC : XYZ.

Corollario. Due piramidi triangolari della medesima altezza, e di basi uguali in superficie sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Ogni piramide triangolare è la terza parte del prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza. F. 216.

Sia SABC una piramide triangolare, ABC DES il prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza; dico che la piramide sarà la terza parte del prisma.

Togliete dal prisma la piramide SABC, resterà il solido SACDE, che si può considerare come una piramide quadrangolare, la di cui sommità è S e che ha per base il parallelogrammo ACDE: tirate la diagonale CE, e conducete il piano SCE che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SCDE. Queste due piramidi hanno per altezza comune la perpendicolare abbassata da S sul piano ACDE; esse hanno basi uguali, poichè i triangoli ACE, DCE sono metà del medesimo parallelogrammo; dunque le due piramidi SACE, SCDE sono equivalenti fra loro *. Ma la piramide SCDE

* P. 17.

e la piramide SABC hanno basi uguali ABC, DSE; hanno pure la medesima altezza, poichè quest'altezza è la distanza dei piani paralleli ABC, DSE; dunque le due piramidi SABC, SCDE sono equivalenti o uguali in solidità. Ma si è dimostrato che la piramide SACE è equivalente a SCDE; dunque le tre piramidi SABC, SCDE, SACE che compongono il prisma ABD sono equivalenti fra loro. Dunque ciascuna di queste piramidi, e nominatamente la piramide SABC è la terza parte del prisma della medesima base, e della medesima altezza.

Corollario. Dunque la solidità d'una piramide triangolare è uguale alla terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

F. 214. *Ogni piramide* SABCDE *ha per misura la terza parte del prodotto della sua base* ABCDE *per la sua altezza* SO.

Poichè, facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide poligona SABCDE in più piramidi triangolari che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma per il teorema precedente ciascuna di queste piramidi si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, BCE, CDE per la terza parte dell'altezza SO: dunque la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligona SABCDE avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, o il poligono ABCDE moltiplicato per $\frac{1}{3}$ SO.

Dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza; o, il che torna lo stesso, ogni piramide è la terza parte del prisma della medesima base e della medesima altezza.

Corollario. Segue da ciò che due piramidi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e che due piramidi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Scolio. Si può valutare la solidità d' ogni corpo poliedro, decomponendolo in piramidi, e questa decomposizione si può fare in più maniere. Una delle più semplici è di far partire i piani di divisione da un medesimo angolo solido; allora si avranno tante piramidi parziali quante faccie sono nel poliedro, eccetto quelle che formano l' angolo solido donde partono i piani di divisione.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

F. 217.

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide è uguale alla somma di tre piramidi che avessero per altezza comune l' altezza del tronco, e le di cui basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, e una media proporzionale fra queste due basi.

Sia SABCDE una piramide tagliata dal piano *abd* parallelo alla base; sia TFGH una piramide triangolare la di cui base ed altezza siano uguali o equivalenti a quelle della

piramide SABCDE. Si possono supporre le due basi situate sopra un medesimo piano; e allora il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh*, situata alla medesima altezza al di sopra del piano comune delle basi. Ora la sezione *fgh* stà alla sezione *abd* come la base FGH stà alla base ABD *; e poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saranno pure. Da ciò segue che le piramidi S*abcde*, T*fgh* sono equivalenti, giacchè hanno la medesima altezza, e basi equivalenti. Le piramidi intiere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti, e per conseguenza basterà dimostrare la proposizione enunziata per il solo caso del tronco di piramide triangolare.

* P. 15.

F. 218. Sia dunque FGH*hfg* un tronco di piramide triangolare a basi parallele: per i tre punti F, *g*, H conducete il piano F*g*H, che taglierà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH; questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; ha per altezza l'altezza del tronco, poichè la sommità *g* è nel piano della base superiore *fgh*.

Dopo aver tolto questa piramide, resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, la di cui sommità è *g*, e la base *fh*HF. Per i tre punti *f*, *g*, H conducete il piano *fg*H, che dividerà la piramide quadrangolare in due triangolari *g*F*f*H, *gfh*H. Quest'ultima ha per base la base superiore *gfh* del tronco, e per altezza l'altezza del tronco. Onde abbia-

mo già due delle tre piramidi che devono comporre il tronco.

Resta a considerare la terza $gFfH$; ora se si conduce gK parallela a fF, e se si imagina una nuova piramide $fFHK$, la di cui sommità è K e la base FfH; queste due piramidi avranno la medesima base FfH; avranno pure la medesima altezza, poichè le sommità g e K sono situate sopra una linea gK parallela al piano della base: dunque queste piramidi sono equivalenti: ma la piramide $fFKH$ può considerarsi come se avesse la sua sommità in f, e così ella avrà la medesima altezza del tronco. Quanto alla sua base FKH, dico che è media proporzionale fra le basi FGH, fgh. In fatti i triangoli FHK, fgh hanno un angolo uguale $F=f$, e un lato uguale $FK=fg$; si ha dunque * $FHK : fgh :: FH : fh$. Si ha pure $FHG : FHK :: FG : FK$, o fg. Ma i triangoli simili FGH, fgh danno $FG : fg :: FH : fh$; dunque $FGH : FHK :: FHK : fgh$; cioè la base FHK è media proporzionale fra le due FGH, fgh. Dunque un tronco di piramide triangolare a basi parallele equivale a tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le di cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore, e una media proporzionale fra queste due basi.

* P. 24. L. III.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Due piramidi triangolari simili hanno le faccie omologhe simili e gli angoli solidi omologhi uguali.

F. 203.

Secondo la definizione, le due piramidi triangolari SABC, TDEF sono simili, se i due triangoli SAB, ABC sono simili ai due TDE, DEF, e similmente posti, cioè se si ha l' angolo ABS=DET, BAS=EDT, ABC=DEF, BAC=EDF, e se inoltre l' inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei piani TDE, DEF. Posto ciò, dico che queste piramidi hanno tutte le faccie respettivamente simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Prendete BG=ED, BH=EF, BI=ET, e tirate GH, GI, IH. La piramide TDEF è uguale alla piramide IGBH; poichè avendo preso i lati GB, BH uguali ai lati DE, EF, e l'angolo GBH essendo per supposizione uguale all'angolo DEF, il triangolo GBH è uguale a DEF. Dunque, per effettuare la sopraposizione delle due piramidi, si può primieramente situare la base DEF sulla sua uguale GBH: dipoi, giacchè il piano DTE è inclinato sopra DEF quanto il piano SAB sopra ABC, è chiaro che il piano DET cadrà indefinitamente sopra il piano BAS. Ma per supposizione l' angolo DET=GBI; dunque ET cadrà sulla sua uguale BI. E poichè i quattro angoli, D, E, F, T coincidono con i quattro G, B, H, I, ne segue * che la piramide TDEF coincide colla piramide IGBH.

* P. 1.

Ora, a cagione dei triangoli uguali DEF, GBH, si ha l' angolo BGH=EDF=BAC; dunque GH è parallela ad AC. Per una ragione simile GI è parallela ad AS; dunque

il piano IGH è parallelo a SAC *. Da ciò segue che il triangolo IGH o il suo uguale TDF è simile a SAC, e che il triangolo IBH o il suo uguale TEF è simile a SBC; dunque le due piramidi triangolari simili SABC, TDEF hanno le quattro faccie respettivamente simili.

* P. 13. L. V.

Di più hanno gli angoli solidi omologhi uguali.

Perchè si è già situato l'angolo solido E sul suo omologo B, e si potrebbe fare lo stesso per due altri angoli solidi omologhi; ma si vede immediatamente che due angoli solidi omologhi sono uguali, per esempio gli angoli T e S, perchè sono formati da tre angoli piani respettivamente uguali, e similmente posti.

Dunque due piramidi triangolari simili hanno le faccie omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario I. I triangoli simili nelle due piramidi danno le proporzioni AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF; dunque, *nelle piramidi triangolari simili, i lati omologhi sono proporzionali.*

Corollario II. E poichè gli angoli solidi omologhi sono uguali, ne segue che *l'inclinazione di due faccie qualunque d'una piramide è uguale all'inclinazione delle faccie omologhe della piramide simile.*

Corollario III. Se si taglia la piramide triangolare SABC con un piano GIH parallelo ad una delle faccie SAC, la piramide parziale

BGIH sarà simile alla piramide intiera BASC. Poichè i triangoli BGI, BGH sono simili respettivamente ai triangoli BAS, BAC, e similmente posti; l'inclinazione dei loro piani è la medesima negli uni e negli altri; dunque le due piramidi sono simili.

F. 214. *Corollario IV.* In generale, *se si taglia una piramide qualunque* SABCDE *con un piano* abcde *parallelo alla base, la piramide parziale* Sabcde *sarà simile alla piramide intiera* SABCDE. Poichè le basi ABCDE, *abcde* sono simili, e tirando AC, *ac*, si è adesso provato che la piramide triangolare SABC è simile alla piramide *Sabc*: dunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC come il punto S per rapporto alla base *abc* (vedete la definizione 18). dunque le due piramidi SABCDE, *Sabcde* sono simili.

Scolio. In vece dei cinque dati richiesti dalla definizione perchè due piramidi triangolari siano simili, si potrebbe sostituirne altri cinque, secondo differenti combinazioni, e ne risulterebbero altrettanti teoremi, fra' quali si può distinguer questo: *Due piramidi triangolari sono simili quand' hanno i lati omologhi proporzionali*

F. 203. Poichè, se si hanno le proporzioni AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF, il che comprende cinque condizioni, i triangoli ABS, ABC saranno simili ai triangoli DET, DEF e similmente posti. Si avrà pure il triangolo SBC simile a TEF; dunque i tre angoli piani che formano l'angolo solido B saranno uguali re-

spettivamente agli angoli piani che formano l'angolo solido E; donde ne segue che l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei loro omologhi TDE, DEF, e che perciò le due piramidi saranno simili.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Due poliedri simili hanno le faccie omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali. F. 219.

Sia ABCDE la base d'un poliedro; siano M e N due angoli fuori del piano di questa base determinati dalle piramidi triangolari MABC, NABC la di cui base comune è ABC; siano, nell'altro poliedro, *abcde* la base omologa o simile ad ABCDE, *m*, e *n*, gli angoli solidi omologhi a M e N determinati dalle piramidi *mabc*, *nabc* simili alle piramidi MABC, NABC dico primieramente che le distanze MN, *mn* sono proporzionali ai lati omologhi AB, *ab*.

In fatti essendo simili le piramidi MABC, *mabc*, l'inclinazione dei piani MAC, BAC è uguale a quella dei piani *mac*, *bac*: parimente essendo simili le piramidi NABC, *nabc*, l'inclinazione dei piani NAC, BAC è uguale a quella dei piani *nac*, *bac*. Dunque, se si tolgono le prime inclinazioni dalle ultime, resterà l'inclinazione dei piani NAC, MAC uguale a quella dei piani *nac*, *mac*. Ma a motivo della similitudine delle stesse piramidi, il triangolo MAC è simile a *mac*, e il triangolo NAC è simile a *nac*. Dunque le due piramidi triangolari MNAC, *mnac*

hanno due faccie respettivamente simili, similmente poste, e ugualmente inclinate fra loro. Dunque queste piramidi sono simili; dunque i loro lati omologhi sono proporzionali, e si ha $MN : mn :: AM : am$. D'altronde $AM : am :: AB : ab$; dunque $MN : mn :: AB : ab$.

Siano P, e p altri angoli omologhi dei poliedri, e si avrà similmente $PN : pn :: AB : ab$; $PM : pm :: AB : ab$; dunque $MN : mn :: PN : pn :: PM : pm$. Dunque *il triangolo* PNM *che unisce tre angoli solidi qualunque d'un poliedro è simile al triangolo pnm che unisce i tre angoli omologhi dell'altro poliedro*.

Siano inoltre Q e q angoli solidi omologhi, e il triangolo PQN sarà simile a pqn. Dico di più che l'inclinazione dei piani PQN, PMN è uguale a quella dei piani pqn, pmn.

Poichè, se si tira QM e qm, si avrà sempre il triangolo QNM simile a qnm, e per conseguenza l'angolo QNM uguale a qnm. Concepite in N un angolo solido formato dai tre angoli piani QNM, QNP, PNM, e in n un angolo solido formato dai tre angoli piani qnm, qnp, pnm: poichè questi angoli piani sono respettivamenre uguali, ne segue che gli angoli solidi sono uguali. Dunque l'inclinazione dei due piani PNQ, PMN è uguale a quella dei loro omologhi pnq, pmn. Dunque se i due triangoli PNQ, PNM fossero in un medesimo piano, nel qual caso si avrebbe l'angolo $QNM = QNP + PNM$, si avrebbe pure l'angolo $qnm = qnp + pnm$, e i due triangoti qnp, pnm sarebbero pure in un medesimo piano.

Tutto ciò che abbiam dimostrato ha luogo qualunque siano gli angoli M, N, P, Q paragonati ai loro omologhi m, n, p, q.

Supponiamo adesso che la superficie d'uno dei poliedri sia divisa in triangoli ABC, ACD, MNP, NPQ, ec., si vede che la superficie dell' altro poliedro conterrà un ugual numero di triangoli abc, acd, mnp, npq, ec. simili, e similmente posti. E se più triangoli come MPN, NPQ ec. appartengono a una medesima faccia, e sono in un medesimo piano, i loro omologhi mpn, npq, ec. saranno parimente in un medesimo piano. Dunque ogni faccia poligona in un poliedro corrisponderà a una faccia poligona simile nell' altro poliedro. Dunque i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di piani simili, e similmente posti. Dico di più che gli angoli solidi omologhi saranno uguali.

Poichè se l'angolo solido N per esempio è formato dagli angoli piani QNP, PNM, MNR, QNR, l'angolo solido omologo n sarà formato dagli angoli piani qnp, pnm, mnr, qnr. Ora questi angoli piani sono respettivamente uguali, e l'inclinazione di due piani adiacenti è uguale a quella dei loro omologhi. Dunque i due angoli solidi sono uguali, giacchè potrebbero esser sopraposti.

Dunque finalmente due poliedri simili hanno le faccie omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario. Segue dalla dimostrazione precedente che se con quattro angoli solidi d'un poliedro si forma una piramide triangolare,

ed un altra piramide pure coi quattro angoli omologhi d'un poliedro simile, queste due piramidi saranno simili; perchè avranno i lati omologhi proporzionali.

Si vede nel tempo stesso che due diagonali omologhe AN, *an*, stanno fra loro come due lati omologhi AB, *ab*.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Due poliedri simili possono dividersi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente, e similmente poste.

Poichè, si è già veduto che le superfici dei due poliedri si possono dividere in un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente posti. Considerate tutti i triangoli d'un poliedro, fuorche quelli che formano l'angolo solido A come basi di tante piramidi triangolari la di cui sommità è in A, queste piramidi prese insieme comporranno il poliedro. Dividete parimente l'altro poliedro in piramidi che abbiano la loro sommità comune nell'angolo *a* omologo ad A. È chiaro che la piramide che congiunge quattro angoli solidi d'un poliedro sarà simile alla piramide che congiunge i quattro angoli omologhi dell'altro poliedro. Dunque due poliedri simili ec.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

F. 214. *Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.*

Poichè, essendo simili due piramidi, la minore potrà esser situata nella maggiore in maniera che abbiano l'angolo solido S comune. Allora le basi ABCDE, *abcde* saranno parallele: poichè, siccome le faccie omologhe sono simili *, l'angolo *Sab* è uguale a SAB, come pure *Sbc* a SBC, dunque il piano *abc* è parallelo al piano ABC *. Posto ciò, sia SO la perpendicolare abbassata dalla sommità S sul piano ABC, e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo ciò che è già stato dimostrato *, SO : So :: SA : Sa :: AB : *ab*, e per conseguenza

* P. 22.
* P. 13. L. V.
* P. 15.

$$\frac{1}{3}\,SO : \frac{1}{3}\,So :: AB : ab\,.$$

Ma essendo le basi ABCDE, *abcde* figure simili si ha

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2\,.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine per termine, ne risulterà la proporzione:

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde \times \tfrac{1}{3}\,So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3\,;$$

ora ABCDE$\times\frac{1}{3}$SO è la solidità della piramide SABCDE *, e *abcde* $\times \frac{1}{3}$ *So* è quella della piramide *Sabcde*: dunque due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

* P. 19.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

F. 219.

Poichè, due poliedri simili possono esser divisi in un medesimo numero di piramidi

triangolari respettivamente simili. Ora le due piramidi simili APNM, *apnm* stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM, *am*, o come i cubi dei lati omologhi AB, *ab*. Lo stesso rapporto avrà luogo fra due altre piramidi omologhe qualunque; dunque la somma di tutte le piramidi che compongono un poliedro, ossia il poliedro stesso stà all'altro poliedro come il cubo d' un lato qualunque del primo stà al cubo del lato omologo del secondo.

Scolio generale.

Possiamo presentare in termini algebrici, cioè nella maniera più succinta la ricapitolazione delle principali proposizioni di questo libro riguardo alle solidità dei poliedri.

Sia B la base d'un prisma, H la sua altezza, la solidità del prisma sarà $B \times H$ o BH.

Sia B la base d'una piramide, H la sua altezza, la solidità della piramide sarà $B \times \frac{1}{3}H$, o $H \times \frac{1}{3}B$, o $\frac{1}{3}BH$.

Sia H l' altezza d'un tronco di piramide a basi parallele, siano A e B le sue basi, e $\sqrt{AB}$ la media proporzionale fra esse, la solidità del tronco sarà $\frac{1}{3}H(A+B+\sqrt{AB})$.

Siano finalmente P e p le solidità di due poliedri simili, A ed a due lati omologhi di questi poliedri, si avrà $P : p :: A^3 : a^3$.

LIBRO SETTIMO

LA SFERA

DEFINIZIONI

1. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Si può imaginare che la sfera sia prodotta dalla rivoluzione del mezzo-circolo DAE intorno al diametro DE. Poichè la superficie descritta con tal movimento dalla curva DAE avrà tutti i suoi punti a distanze uguali dal centro C. F 220.

2. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro a un punto della superficie; il *diametro*, o *asse* è una linea che passa per il centro, e che termina dalle due parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono uguali, tutti i diametri sono uguali, e doppi del raggio.

3. Si dimostrerà * che ogni sezione della sfera fatta da un piano è un circolo; posto ciò, si chiama *gran circolo* la sezione che passa per il centro, *piccolo circolo* quella che non vi passa. * P. 1.

4. Un *piano* è *tangente* della sfera quando

ha un solo punto comune colla sua superficie.

5. *Il polo d'un circolo* della sfera è un punto della superficie ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di questo circolo. Si farà vedere * che ogni circolo grande o piccolo ha sempre due poli.

* P. 6.

6. *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di circoli grandi.

Questi archi che si chiamano *i lati* del triangolo, vengono sempre supposti minori della mezza-circonferenza. Gli angoli che i loro piani fanno fra loro sono gli angoli del triangolo.

7. *Un triangolo sferico* prende il nome di *rettangolo*, *obliquangolo*, *isoscele*, *equilatero* ne' casi stessi d'un triangolo rettilineo.

8. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da più archi di circoli grandi.

9. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa fra due gran mezzi-circoli che hanno un diametro comune.

10. Chiamerò *cuneo* o *unghia sferica* la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi gran mezzi-circoli. La *base* del cuneo sarà il fuso.

11. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani d'un angolo solido la di cui sommità è al centro. La base della piramide sarà un poligono sferico.

12. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paral-

leli: uno di questi piani puo essere tangente della sfera, allora la zona ha una sola base.

13. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli. Uno di questi piani può esser tangente della sfera, e allora il segmento sferico ha una sola base.

14. L'*asse*, o *altezza* d'una zona e d'un segmento è la distanza dei due piani paralleli che sono le basi della zona o del segmento.

15. Mentre il mezzo circolo DAE girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni settore circolare come DCF o FCH descrive un solido che si chiama *settore sferico*.

F. 220.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Se la sfera è tagliata da un piano qualunque, la sezione sarà un circolo.

F. 221.

Sia AMB la sezione fatta da un piano nella sfera il di cui centro è C. Dal punto C conducete la perpendicolare CO sul piano AMB, e differenti linee CM, CM a differenti punti della curva AMB che termina la sezione.

Le oblique CM, CM, CB sono uguali, poichè sono raggi della sfera, esse sono dunque ugualmente lontane dalla perpendicolare CO *; dunque tutte le linee OM, OM, OB sono uguali; dunque la sezione AMB è un circolo di cui il punto O è il centro.

* P. 5. L. V.

Corollario I. Se la sezione passa per il cen-

tro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera; dunque tutti i gran circoli sono uguali fra loro.

Corollario II. Due gran circoli si tagliano sempre in due parti uguali, poichè la loro comune intersezione, passando per il centro, è un diametro.

Corollario III. Ogni gran circolo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali; poichè se dopo aver separato i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo la convessità dal medesimo lato, le due superfici coincideranno una coll' altra, senza di che vi sarebbero dei punti più vicini al centro gli uni degli altri.

Corollario V. Il centro d' un piccolo circolo e quello della sfera sono sopra una medesima retta perpendicolare sul piano del circolo piccolo.

Corollario V. I circoli piccoli sono tanto più piccoli quanto sono più lontani dal centro della sfera; poichè, quanto è più grande la distanza CO, tanto è più piccola la corda AB diametro del piccolo circolo AMB.

Corollario VI. Per due punti dati sulla superficie d' una sfera, si può fare passare un arco di circolo grande; poichè i due punti dati e il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione d' un piano. Ma se i due punti dati fossero alle estremità d' un diametro, allora questi due punti e il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un infinità di circoli grandi che potrebbero passare per i due punti dati.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

In ogni triangolo sferico ABC, *un lato qualunque è minore della somma degli altri due.* F. 222.

Sia O il centro della sfera, e siano condotti i raggi OA, OB, OC. Se si imaginano i piani AOB, AOC, COB, questi piani formeranno al punto O un angolo solido; e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura i lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC. Ora ciascuno dei tre angoli piani che compongono l'angolo solido è minore della somma degli altri due *; dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minore della somma degli altri due.

* P. 20. L. V.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla superficie della sfera è l'arco di circolo grande che unisce i due punti dati. F. 223.

Sia ANB l'arco di circolo grande che unisce i punti A e B, e sia, se è possibile, M un punto della linea la più corta fra A e B. Per il punto M conducete gli archi di circolo grande MA, MB, e prendete BN=MB.

Per il teorema precedente, ANB è più corto di AMB togliendo da ambedue BN=BM, resterà AN<AM. Ora la distanza da B a M, ossia che essa si confonda coll'arco BM, o che essa sia qualunque altra linea, è uguale alla distanza da B a N; poichè facendo girare il piano del circolo grande BM intor-

no al diametro che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, e allora la linea più corta da M a B, qualunque sia, si confonderà con quella da N a B; dunque i due camini da A a B, l' uno che passa per M, l'altro per N, hanno una parte uguale da M a B e da N a B. Il primo camino per supposizione è il più corto: dunque la distanza da A a M è più corta della distanza da A a N, il che è assurdo, poichè l' arco AM è maggiore di AN. Dunque verun punto della linea più corta fra A e B non può essere fuori dell' arco ANB dunque quest' arco stesso è la linea più corta fra le di lui estremità.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

F. 224. *La somma dei tre lati d' un triangolo sferico è minore della circonferenza d' un circolo grande.*

Sia ABC un triangolo sferico qualunque; prolungate i lati AB, AC finchè s' incontrino di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD saranno mezze-circonferenze, poichè due circoli grandi si tagliano sempre in due parti uguali ma nel triangolo BCD il lato $BC < BD + CD$; aggiungendo dalle due parti $AB + AC$, si avrà $AB + AC + BC < ABD + ACD$, cioe minore d' una circonferenza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

F. 225 *La somma dei lati d' ogni poligono sferico è minore della circonferenza d' un circolo grande.*

Sia, per esempio, il pentagono ABCDE; prolungate i lati AB, DC finchè s'incontrino in F; poichè BC è minore di BF+CF, il contorno del pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Prolungate nuovamente i lati AE, FD finchè s'incontrino in G, si avrà ED<EG+GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza d'un circolo grande; dunque molto più il contorno del poligono ABCDE è minore della stessa circonferenza.

Scolio. Questa proposizione è in sostanza la medesima della 21 del libro 5. Perchè, se O è il centro della sfera, si può imaginare al punto O un angolo solido formato dagli angoli piani AOB, BOC, COD, ec. e la somma di questi angoli deve esser minore di quattro angoli retti, il che non differisce dalla proposizione presente. La dimostrazione che ora ne abbiamo data è differente da quella del libro quinto: l'una e l'altra suppongono che il poligono ABCDE sia *convesso*, ovvero che verun lato prolungato non tagli la figura.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Se si conduce il diametro DE *perpendicolare al piano del circolo grande* AMB, *le estremità* D *ed* E *di questo diametro saranno i poli del circolo* AMB, *e di tutti i piccoli circoli come* FNG *che gli sono paralleli*. F. 220.

Poichè, DC essendo perpendicolare al pia-

no AMB è perpendicolare a tutte le rette CA, CM, CB, ec. condotte dal suo piede in questo piano: dunque tutti gli archi DA, DM, DB, ec. sono quarte parti di circonferenza: lo stesso è degli archi EA, EM, EB, ec. Dunque ciascuno dei punti D ed E è ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza AMB; dunque essi sono i poli della circonferenza medesima.

In secondo luogo il raggio DC, perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare al suo parallelo FNG; dunque passa per il centro O del circolo FNG *: dunque se si tirano le oblique DF, DN, DG, queste oblique si allontaneranno ugualmente dalla perpendicolare DO e saranno uguali. Ma essendo uguali le corde sono uguali gli archi; dunque tutti gli archi DF, DN, DG, ec. sono fra loro uguali; dunque il punto D è il polo del circolo piccolo FNG, e per la medesima ragione il punto E è l'altro polo.

* P. 1.

Corollario I. Ogni arco DM condotto da un punto dell'arco di circolo grande AMB al suo polo è un quarto di circonferenza. Noi per brevità lo chiameremo *quadrante*, e questo *quadrante* fa nel medesimo tempo un angolo retto coll'arco AM. Poichè essendo la linea DC perpendicolare al piano AMC, ogni piano DMC che passa per la linea DC è perpendicolare al piano AMC *; dunque l'angolo AMD è un angolo retto.

* P. 17. L. V.

Corollario II. Per trovare il polo d'un arco dato AM, conducete l'arco indefinito MD perpendicolare ad AM, prendete MD ugua-

le a un *quadrante*, e il punto D sarà uno dei poli dell'arco AM; ovvero conducete per i due punti A e M gli archi AD e MD perpendicolari ad AM, il punto d'incontro D di questi due archi sarà il polo richiesto.

Corollario II. Reciprocamente se la distanza del punto D da ciascuno dei punti A e M è uguale a un *quadrante*, dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM, e che nel medesimo tempo gli angoli DAM, AMD saranno retti.

Poichè, sia C il centro della sfera, e siano condotti i raggi CA, CD, CM: giacchè gli angoli ACD, MCD sono retti, la linea CD è perpendicolare alle due rette CA, CM; dunque è perpendicolare al loro piano; dunque il punto D è il polo dell'arco AM; e però gli angoli DAM, AMD son retti.

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di segnare sulla superficie della sfera degli archi di circolo colla medesima facilità che sopra una superficie piana. Si vede, per esempio, che facendo girare l'arco DF o ogni altra linea dello stesso intervallo intorno al punto D, l'estremità F descriverà il piccolo circolo FNG e se si fa girare il *quadrante* DFA intorno al punto D, l'estremità A descriverà l'arco di circolo grande AM.

Se bisogna prolungare l'arco AM, o se non sono dati che i soli punti A e M per cui deve passar quest'arco, si determinerà prima il polo D coll'intersezione di due archi descritti dai punti A e M come centri con un intervallo uguale al *quadrante*. Es-

sendo trovato il polo D, si descriverà dal punto D come centro e col medesimo intervallo l'arco AM e il suo prolungamento.

Finalmente è facile il vedere cosa bisognerebbe fare per condurre da un punto dato un arco perpendicolare a un arco dato, e parimente per dividere un arco dato in due parti uguali, ec.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

F. 226. *Ogni piano perpendicolare all' estremità d'un raggio è tangente della sfera.*

Sia FAG un piano perpendicolare all'estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su questo piano, e che si tirino OM ed AM, l'angolo OAM sarà retto, e però la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuori della sfera; e siccome è lo stesso per ogni altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano ha il solo punto A comune colla superficie della sfera; dunque è tangente di questa superficie.

Scolio. Si può provare parimente che due sfere hanno un sol punto comune e sono per conseguenza *tangenti* l'una dell'altra, quando la distanza dei loro centri è uguale alla somma o alla differenza dei loro raggi. Allora i centri e il punto di contatto sono in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

L'angolo BAC *che fanno fra loro due archi di circoli grandi* AB, AC *è uguale all'angolo* FAG *formato dalle tangenti di quest'archi al punto* A: *ha pure per misura l'arco* DE *descritto dal punto* A *come polo fra i lati* AB, AC *prolungati se è necessario*. F.226.

Poichè, la tangente AF condotta nel piano dell'arco AB è perpendicolare al raggio AO; la tangente AG condotta nel piano dell'arco AC è perpendicolare al medesimo raggio AO. Dunque l'angolo FAG è uguale all'angolo dei piani OAB, OAC *, che è quello degli archi AB, AC, e che si indica con BAC.

* P.16. L.V.

Parimente, se l'arco AD è uguale a un *quadrante*, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e perciò l'angolo DOE sarà uguale all'angolo dei piani AOD, AOE. Dunque l'arco DE è la misura dell'angolo di questi piani, ossia la misura dell'angolo BAC.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di circoli grandi descritti dalle loro sommità come poli e compresi fra i loro lati. Onde è facile di fare un angolo uguale a un angolo dato.

Scolio. L'angolo BAC è uguale all'angolo BHC formato dai medesimi lati prolungati: giacchè l'uno o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani BAO, CAO.

Osservate pure che nell'incontro dei due archi AD, BC, i due angoli adiacenti ABC, CBD presi insieme equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

F. 227. *Essendo dato il triangolo* ABC, *se si descrive il triangolo* DEF *in maniera che gli angoli del primo siano i poli dei lati del secondo, reciprocamente gli angoli del secondo saranno i poli dei lati del primo.*

Dai punti A, B, C come poli, siano descritti gli archi EF, DF, DE, che col loro concorso formano il triangolo DEF: dico che gli angoli D, E, F saranno i poli degli archi BC, AC, AB respettivamente.

Poichè, essendo il punto A il polo dell'arco EF, la distanza AE è un *quadrante*; essendo il punto C il polo dell'arco DE, la distanza CE è parimente un *quadrante*; dunque il punto E è lontano un *quadrante* da ciascuno dei punti A e C; dunque è il polo dell'arco AC. Si dimostrerà del pari che D è il polo dell'arco BC, e F quello dell'arco AB.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può essere descritto per mezzo di DEF, come DEF per mezzo di ABC.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Poste le medesime cose del teorema precedente ciascun angolo d'uno dei triangoli ABC,

DEF *avrà per misura la mezza circonferenza meno il lato opposto nell' altro triangolo.*

Siano prolungati, se è necessario, i lati AB, AC finchè incontrino EF in G e H; poichè il punto A è il polo dell'arco GH, l'angolo A avrà per misura l'arco GH. Ma l'arco EH è un *quadrante* come pure GF, giacchè E è il polo di AH, e F è il polo di AG; dunque EH+GF equivale ad una mezza circonferenza. Ora EH+GF è lo stesso che EF+GH. Dunque l'arco GH che misura l'angolo A è uguale a una mezza-circonferenza meno il lato EF; parimente l'angolo B avrà per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF, e l'angolo C, $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Questa proprietà dev'essere reciproca fra i due triangoli, giacchè si descrivono nella stessa maniera l'uno col mezzo dell'altro. Perciò si troverà che gli angoli D, E, F del triangolo DEF hanno per misura respettivamente $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AB. In fatti l'angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI: ora MI+BC=MC+BI=$\frac{1}{2}$ *circ.* Dunque l'arco MI misura dell'angolo D, =$\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, e così degli altri.

Scolio. Bisogna osservare che oltre il triangolo DEF, se ne potrebbero formare tre altri i di cui angoli sarebbero parimente i poli dei lati del triangolo ABC, perchè l'intersezione di tre archi dati di posizione produce quattro triangoli. Ma la proposizione attuale non ha luogo che per il triangolo centrale, che è distinto dagli altri tre in questo che i due angoli A e D sono situati da una

F. 228.

medesima parte di BC, i due B ed E da una medesima parte di AC, e i due C e F da una medesima parte di AB.

Si danno diversi nomi ai due triangoli ABC, DEF: il più conveniente sembra quello di *triangoli polari*.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA

F. 229. *Essendo dato il triangolo* ABC, *se dal polo* A *e coll' intervallo* AC *si descrive l'arco di piccolo circolo* DEC, *se dal polo* B *e coll' intervallo* BC *si descrive parimente l'arco* DFC, *e dal punto ove gli archi* DEC, DFC *si taglieranno, si conducono gli archi di circolo grande* AD, DB, *dico che il triangolo* ADB *così formato avrà le sue parti uguali a quelle del triangolo* ACB.

Poichè, per costruzione il lato AD=AC, DB=BC, AB è comune; dunque questi triangoli hanno i lati respettivamente uguali. Dico adesso che gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

In fatti se si suppone il centro della sfera in O, si può concepire un angolo solido formato al punto O dai tre angoli piani AOB, AOC, BOC; si può concepire parimente un secondo angolo solido formato dai tre angoli piani AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono uguali a quelli del triangolo ABD, ne segue che gli angoli piani che formano uno di questi angoli solidi sono uguali respettivamente agli angoli piani che formano l'altro angolo solido. Ma in tal

caso si è dimostrato * che i piani in cui sono gli angoli uguali sono ugualmente inclinati fra loro; dunque gli angoli del triangolo sferico DAB sono uguali a quelli del triangolo CAB, cioè DAB=BAC, DBA=ABC, e ADB=ACB. Dunque i lati e gli angoli del triangolo ADB sono uguali ai lati e agli angoli del triangolo ACB.

* P. 22. L. V.

Scolio. L'uguaglianza di questi triangoli non è però un uguaglianza assoluta o di sopraposizione, perchè sarebbe impossibile d'applicar l'uno sull'altro esattamente, a meno che non fossero isosceli. L'uguaglianza di cui si tratta è quella che abbiamo già chiamata uguaglianza di *simmetria*, e perciò chiameremo *simmetrici* i triangoli ACB, ADB.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

F. 230.

Due triangoli situati sopra la medesima sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali.

Sia il lato AB=EF, il lato AC=EG, e l'angolo BAC=FEG; il triangolo EFG potrà esser situato sopra il triangolo ABC o sul suo simmetrico ABD nella medesima maniera che si soprapongono due triangoli rettilinei che hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno uguali a quelle del triangolo ABC, cioè oltre le tre parti che sono supposte uguali, si avrà il lato BC=FG, l'angolo ABC=EFG, e l'angolo ACB=EGF.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.

Poichè, uno di questi triangoli può essere situato sopra l'altro, o sul suo simmetrico, come si è spiegato nel caso simile dei triangoli rettilinei. Vedete P. 7. L. I.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

F. 229. *Se due triangoli situati sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali sono equilateri fra loro, saranno anche equiangoli, e gli angoli uguali saranno opposti ai lati uguali.*

Ciò è manifesto per la Prop. XI., ove si è veduto che con tre lati dati AB, AC, BC non si può fare che due triangoli ACB, ABD, differenti in quanto alla posizione delle parti, ma uguali in quanto alla grandezza di queste medesime parti. Dunque due triangoli equilateri fra loro sono o assolutamente uguali, o almeno uguali per simmetria; in ambedue i casi sono equiangoli, e gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

F. 231. *In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e reciprocamente se due angoli d'un triangolo sferico sono uguali, il triangolo sarà isoscele.*

1.° Sia il lato AB=AC; dico che si avrà l' angolo C=B; poichè se dalla sommità A al punto D mezzo della base si conduce l'arco AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i tre lati respettivamente uguali; cioè AD comune, BD=DC, e AB=AC; dunque per il teorema precedente questi triangoli avranno gli angoli uguali, e si avrà B=C.

2.° Sia l' angolo B=C; dico che sarà AC=AB: poichè se il lato AB non è uguale ad AC, sia AB il più grande di essi, prendete BO=AC, e tirate OC. I due lati BO, BC sono uguali ai due lati AC, BC; l' angolo compreso dai primi OBC è uguale all' angolo compreso dai secondi ACB. Dunque per la prop. 12, i due triangoli BOC, ACB hanno le altre parti uguali, e per conseguenza l' angolo OCB=ABC; ma l' angolo ABC per supposizione =ACB; dunque si avrebbe OCB=ACB, il che è impossibile. Dunque non si può supporre AB differente da AC; dunque i lati AB, AC opposti agli angoli uguali C, e B sono uguali.

Scolio. La medesima dimostrazione prova che l' angolo BAD=DAC, e che l' angolo BDA=ADC. Dunque questi due ultimi sono retti: dunque *l' arco condotto dalla sommità d' un triangolo isoscele al mezzo della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l' angolo della sommità in due parti uguali*.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

In un triangolo sferico ABC, *se l' angolo* A F. 232.

è maggiore dell' angolo B, *il lato* BC *opposto all' angolo* A *sarà maggiore del lato* AC *opposto all' angolo* B: *reciprocamente se il lato* BC *è maggiore di* AC, *l' angolo* A *sarà maggiore dell' angolo* B.

1.° Sia l' angolo $A>B$, fate l' angolo
*P. 15. $BAD=B$, avrete $AD=DB$ *. Ma $AD+DC$ è maggiore di AC: invece di AD mettendo DB, si avrà $DB+DC$ o $BC>AC$.

2.° Se si suppone $BC>AC$, dico che l' angolo BAC sarà maggiore di ABC. Poichè se BAC fosse uguale ad ABC, si avrebbe $BC=AC$; e se fosse $BAC<ABC$, ne nascerebbe secondo ciò che si è dimostrato $BC<AC$: il che è contro la supposizione. Dunque BAC è maggiore di ABC.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

F. 233. *Se i due lati* AB, AC *del triangolo sferico* ABC *sono uguali ai due lati* DE, DF *del triangolo* DEF *fatto sopra una sfera uguale, se nello stesso tempo l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* D, *dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo triangolo.*

La dimostrazione è assolutamente simile a quella della prop. X. Lib. I.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Se due triangoli descritti sulla medesima sfera o sopra sfere uguali sono equiangoli fra loro, saranno anche equilateri.

Siano A e B i due triangoli dati, P e Q i loro triangoli polari. Poichè gli angoli sono uguali nei triangoli A e B, i lati saranno uguali nei polari P e Q *. Ma dall'essere i triangoli P e Q equilateri fra loro ne segue che sono ancora equiangoli *. Finalmente dall'essere uguali gli angoli ne' triangoli P e Q, ne segue * che i lati sono uguali nei loro polari A e B. Dunque i triangoli equiangoli A e B sono nel medesimo tempo equilateri fra loro.

* P.10.

* P.14.

* P.10.

Si può ancora dimostrare la medesima proposizione senza il soccorso dei triangoli polari.

Siano ABC, DEF due triangoli equiangoli fra loro, talmente che sia A=D, B=E, C=F, dico che sarà il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF.

F. 234.

Sul prolungamento dei lati AC, AB prendete AG=DE, e AH=DF; tirate GH e prolungate gli archi BC, GH finchè s'incontrino in I e in K.

I due lati AG, AH sono per costruzione uguali ai due DE, DF, l'angolo compreso GAH=BAC=EDF; dunque * i triangoli AGH, DEF sono uguali in tutte le loro parti, e si ha l'angolo AGH=DEF=ABC, e l'angolo AHG=DFE=ACB.

* P.14.

Nei triangoli IBG, KBG il lato BG è comune, l'angolo IGB=GBK; e poichè IGB+BGK è uguale a due retti, come pure GBK+IBG, ne segue che BGK=IBG. Dunque i triangoli IBG, GBK sono uguali *, e si ha IG=BK, e IB=GK.

* P.13.

Parimente dall'essere l'angolo AHG=ACB, si conchinderà che i triangoli ICH, HCK han-

no un lato uguale adiacente a due angoli uguali. Dunque sono uguali; dunque IH=CK, e HK=IC.

Adesso se dalle uguali BK, IG si tolgono le uguali CK, IH, i resti BC, GH saranno uguali: D'altronde l'angolo BCA=AHG, e l'angolo ABC=AGH. Dunque i triangoli ABC, AHG hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali; dunque sono uguali. Ma il triangolo DEF è uguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque è uguale anche al triangolo ABC, e si avrà AB=DE, AC=DF, BC=EF. Dunque se due triangoli sferici sono uguali fra loro, i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali.

Scolio. Questa proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, ove dall'uguaglianza degli angoli non si può dedurre altro che la proporzionalità dei lati. Ma è facile di concepire la differenza che passa rapporto a ciò tra i triangoli rettilinei e i triangoli sferici. Nella proposizione presente, come pure nelle proposizioni 12, 13, 14 e 18 ove si tratta del paragone dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli sono descritti sulla medesima sfera o sopra sfere uguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque sopra sfere uguali due triangoli non possono esser simili senza essere uguali. Non fà meraviglia dunque che l'uguaglianza degli angoli porti seco l'uguaglianza dei lati.

Sarebbe altrimenti se i triangoli fossero descritti sopra sfere disuguali: allora essendo

uguali gli angoli, i triangoli sarebbero simili, e i lati omologhi sarebbero fra loro come i raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

La somma degli angoli d'ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

Poichè 1.° ciascun angolo d'un triangolo sferico è minore di due angoli retti; (vedete lo scolio seguente) dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2.° La misura di ciascun angolo d'un triangolo sferico è uguale alla mezza-circonferenza meno il lato corrispondente del triangolo polare *. Dunque la somma dei tre angoli ha per misura tre mezze-circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora quest'ultima somma è minore di una circonferenza *; dunque togliendola da tre mezze-circonferenze, resterà più d'una mezza-circonferenza che è la misura di due angoli retti. Dunque 2.° la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

* P. 10.

* P. 4.

Corollario I. La somma degli angoli d'un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; varia da due angoli retti fino a sei, senza potere essere uguale nè all'uno nè all'altro limite. Onde due angoli dati non fanno conoscere il terzo.

Corollario II. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

F. 235. Se il triangolo ABC è *birettangolo*, cioè se ha due angoli retti B e C, la sommità A sarà il polo della base BC; e i lati AB, AC saranno *quadranti*.

Se in oltre l'angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *trirettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, e i suoi lati *quadranti*. Il triangolo trirettangolo è contenuto otto volte nella superficie della sfera, il che si vede per mezzo della fig. 236, supponendo l'arco MN uguale a un *quadrante*.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede, e conforme alla definizione 6. che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori della mezza-circonferenza, allora ne segue che gli angoli sono sempre minori di due

F. 237. angoli retti. Perchè, se il lato AB è minore della mezza-circonferenza, come pure AC, questi archi devono esser prolungati ambedue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD presi insieme equivalgono a due angoli retti; dunque l'angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

Osserveremo però che esistono dei triangoli sferici, di cui certi lati sono maggiori della mezza-circonferenza, e certi angoli sono maggiori di due angoli retti. Perchè, se si prolunga il lato AC in una circonferenza intiera ACE, ciò che resta togliendo dalla mezza sfera il triangolo ABC è un nuovo triangolo, che si può pure indicare con ABC, e i di cui lati sono AB, BC, AEC. Si vede dunque che il lato AEC è maggiore della mezza-circonferenza AED, ma nel mede-

simo tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti dell'eccesso CBD.

Del resto, si sono esclusi dalla definizione i triangoli i di cui lati ed angoli sono sì grandi, perchè la loro risoluzione o la determinazione delle loro parti si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione. In fatti si vede facilmente che se si conoscono gli angoli e i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente gli angoli e i lati del triangolo che è il resto della mezza-sfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Il fuso AMBNA stà alla superficie della sfera come l'angolo MAN di questo fuso stà a quattro angoli retti, o come l'arco MN che misura quest'angolo stà alla circonferenza. F. 235.

Supponiamo primieramente che l'arco MN stia alla circonferenza MNPQ in un rapporto razionale, per esempio come 5 sta a 48. Si dividerà la circonferenza MNPQ in 48 parti uguali, di cui MN ne conterrà 5; congiungendo dipoi il polo A e i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza si avranno 48 triangoli nella mezza-sfera AMNPQ che saranno tutti uguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti uguali. La sfera intiera conterrà dunque 96 di tali triangoli parziali, e il fuso AMBNA ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla superficie della sfera come 10 sta a 96, o coma 5 sta a 48, cioè come l'arco MN sta alla circonferenza.

Se l'arco MN non è commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento di cui si sono già veduti molti esempi che il fuso sta sempre alla superficie della sfera come l'arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

Corollario II. Si è già veduto che la superficie intiera della sfera è uguale a otto triangoli trirettangoli *. Dunque se si prende per unità l'area d'uno di questi triangoli; la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Posto ciò, la superficie del fuso il di cui angolo è A sarà espressa da 2A, (se però l'angolo A è valutato nella supposizione che l'angolo retto sia uguale all'unità;) poichè si ha $2A : 8 :: A : 4$. Vi sono quì dunque due unità differenti; una per gli angoli, ed è l'angolo retto; l'altra per le superfici, ed è il triangolo sferico tri-rettangolo, ossia quello di cui tutti gli angoli sono retti, e i lati sono quarte parti di circonferenza.

* P. 19.

Scolio. L'unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB stà al solido intiero della sfera come l'angolo A stà a quattro angoli retti. Poichè essendo uguali i fusi, le unghie sferiche saranno parimente uguali. Dunque due unghie sferiche stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

F. 238.

Se due gran circoli AOB, COD *si tagliano*

come si voglia nell' emisfero OACBD, *la somma dei triangoli opposti* AOC, BOD, *sarà uguale al fuso il di cui angolo è* BOD.

Poichè, prolungando gli archi OB, OD nell' altro emisfero finchè s' incontrino in N, OBN sarà una mezza-circonferenza come pure AOB; togliendo OB da ambedue, si avrà BN=AO. Per una simil ragione DN=CO, e BD=AC. Dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati uguali, e similmente disposti; dunque sono uguali, e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente al fuso OBNDO, il di cui angolo è BOD.

Scolio. È chiaro pure che le due piramidi sferiche che hanno per base i triangoli AOC, BOD prese insieme equivalgono all' unghia sferica il di cui angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

La superficie d' un triangolo sferico qualunque ha per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti. F. 239.

Sia ABC il triangolo proposto; prolungate i suoi lati finchè incontrino il gran circolo DEFG condotto a piacere fuori del triangolo. Per il teorema precedente i due triangoli ADE, AGH presi insieme equivalgono al fuso il di cui angolo è A, e che ha per misura 2A *. Onde si avrà ADE+AGH=2A; per una simil ragione BGF+BID=2B, CIH +CFE=2C. Ma la somma di questi sei triangoli supera la mezza-sfera di due volte il triangolo ABC; d' altronde la mezza-sfera è

* P. 20.

rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è uguale a $2A+2B+2C-4$, e per conseguenza $ABC=A+B+C-2$. Dunque un triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli trirettangoli, o ottave parti di sfera che sono l'unità di superficie saranno contenuti nel triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli sono tutti uguali a $\frac{4}{3}$ d'un angolo retto, allora i tre angoli varranno 4 angoli retti, e il triangolo proposto sarà rappresentato da $4-2$, o 2; dunque sarà uguale a due triangoli trirettangoli o alla quarta parte della superficie della sfera.

Corollario II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso il di cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$, ed anche la piramide sferica la di cui base è ABC, equivale all'unghia sferica il di cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo trirettangolo, la piramide sferica che ha per base ABC si paragona, e segue la medesima proporzione colla piramide trirettangola. L'angolo solido alla sommità della piramide si paragona parimente coll'angolo solido alla sommità della piramide trirettangola. In fatti il paragone si stabilisce per mezzo della coincidenza delle parti. Ora se le basi delle pi-

ramidi coincidono, è chiaro che le piramidi stesse coincideranno come pure gli angoli alla loro sommità. Da ciò nascono più conseguenze.

1.° Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona si può dividere in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni che servono loro di basi.

2.° Gli angoli solidi alla sommità delle medesime piramidi stanno ugualmente nella proporzione delle basi. Dunque, per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare le loro sommità al centro di due sfere uguali, e questi angoli solidi staranno fra loro come i poligoni sferici intercetti frai loro piani o faccie.

L'angolo alla sommità della piramide trirettangola è formato da tre piani perpendicolari fra loro. Quest'angolo che si può chiamare *angolo solido retto* è adattatissimo per servire d'unità di misura agli altri angoli solidi. Posto ciò, il medesimo numero che dà l'area del poligono sferico darà la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esempio, se l'area del poligono sferico è $\frac{3}{4}$, vale a dire se è uguale a $\frac{3}{4}$ del triangolo trirettangolo, l'angolo solido corrispondente sarà pure $\frac{3}{4}$ dell'angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

La superficie d'un poligono sferico ha per F.240.

misura la somma dei suoi angoli meno tante volte due angoli retti quanti lati di più di due ha il poligono.

Dall'angolo A siano condotte a tutti gli altri angoli le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli meno due quanti lati egli contiene. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti, ed è chiaro che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono. Dunque la superficie del poligono è uguale alla somma dei suoi angoli, meno tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati meno due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli d'un poligono sferico, n il numero dei suoi lati; essendo supposto l'angolo retto per l'unità, la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$ o $s-2n+4$.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Sia S *il numero degli angoli solidi d'un poliedro,* H *il numero delle sue faccie,* A *il numero delle sue costole; dico che sarà sempre* $S+H=A+2$.

Prendete dentro il poliedro un punto da cui condurrete delle linee rette a tutti gli angoli; imaginate dipoi che dal medesimo punto come centro si descriva una superficie sferica che sia incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; congiungete questi punti con degli archi di circoli grandi in modo

che si formino sulla superficie della sfera dei poligoni corrispondenti e uguali in numero alle faccie del poliedro. Sia ABCDE uno di questi poligoni, e sia n il numero dei suoi lati; la sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di ciascuno degli altri poligoni sferici, e si sommino tutti insieme, se ne conchiuderà che la loro somma, o la superficie della sfera rappresentata da 8 è uguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni, meno due volte il numero dei loro lati, più 4 preso tante volte quante sono le faccie. Ora siccome tutti gli angoli formati intorno a un medesimo punto A equivalgono a quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è uguale a 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono, è dunque uguale a 4S. Dipoi il doppio del numero dei lati AB, BC, CD ec. è uguale al quadruplo del numero delle costole o $=4A$, giacchè la medesima costola serve di lato a due faccie. Dunque si avrà $8=4S-4A+4H$; e prendendo la quarta parte di ciascun membro, $2=S-A+H$, o il che torna lo stesso, $S+H=A+2$.

F. 240.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli piani che formano gli angoli solidi d' un poliedro è uguale a tante volte quattro angoli retti quante unità sono in* S—2 *essendo* S *il numero degli angoli solidi del poliedro*.

Poichè se si considera una faccia il di cui numero di lati sia n, la somma degli angoli di questa faccia sarà uguale a tante volte due

angoli retti quante unità sono in $n-2$. Ma la somma di tutti gli n, o il numero dei lati di tutte le faccie è $2A$, e 2 preso tante volte quante sono le faccie $=2H$. Dunque la somma di tutti gli angoli delle faccie è uguale a due angoli retti presi tante volte quante unità vi sono in $2A-2H$. D'altronde $2A-2H=2S-4=2(S-2)$. Dunque la somma di cui si tratta è uguale a quattro angoli retti presi tante volte quante unità sono in $S-2$.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

F. 241. *Di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati e un terzo a piacere, il maggiore è quello che si può inscrivere in una mezza-circonferenza di cui la corda del terzo lato sarà il diametro.*

Sia ABC il triangolo più grande di tutti quelli che si possono formare coi due lati dati AB, AC e un terzo a piacere; al di sotto di BC fate il triangolo BDC uguale a BAC, talmente che si abbia BD=AC, e DC=AB; tirate la diagonale AD, dico che la diagonale AD è uguale a BC.

Poichè il triangolo ABD ha i due lati AB, BD uguali ai due AB, AC del triangolo ABC: se dunque il terzo lato AD non è uguale a BC, il triangolo ABC sarà maggiore per supposizioné di ABD; per la medesima ragione ABC o BCD sarà maggiore di ACD: dunque ABD+ADC sarebbe minore di ABC+BCD. Ma è chiaro all'opposto che

le due somme sono uguali giacchè l'una e l'altra formano il quadrilatero ABCD; dunque la diagonale AD è uguale a BC, e nel tempo stesso il triangolo BAD è uguale al triangolo BAC.

Segue da ciò che l'angolo BAD è uguale ad ABC, e che perciò il triangolo BAO è isoscele; si ha dunque BO=AO; si ha parimenti AO=CO. Dunque, se dal punto O come polo e coll'intervallo BO si descrive una circonferenza, questa circonferenza passerà per i tre punti B, A, C; dunque il triangolo *massimo* BAC è quello che si può inscrivere in una mezza-circonferenza di cui la corda del terzo lato BC è il diametro.

Scolio I. Il triangolo sferico BAC diventa un *massimo* nel medesimo tempo del triangolo rettilineo BAC formato dalle corde dei di lui lati, cioè quando l'angolo compreso dalle corde AB, AC è un angolo retto. Perchè allora questo triangolo può essere inscritto in una mezza-circonferenza di cui il terzo lato BC è il diametro.

Nel triangolo rettilineo BAC l'angolo retto A è uguale alla somma degli altri due B e C; nel triangolo sferico BAC, l'angolo BAC è pure uguale alla somma degli altri due. Poichè, l'angolo BAC=BAO+CAO; ora BAO=ABO, e CAO=ACO. Dunque l'angolo A del triangolo sferico BAC è uguale alla somma degli altri due B e C; e da ciò segue che l'angolo A è ottuso, perchè la somma dei tre angoli del triangolo BAC è doppia dell'angolo A, e d'altronde que-

sta stessa somma è maggiore di due angoli
* P.19. retti *. Dunque l'angolo A è maggiore d'un angolo retto.

Se si prolungano i lati AB, AC finchè s'incontrino in E, il triangolo BCE sarà uguale alla quarta parte della superficie della sfera. Poichè l'angolo E=A=ABC+ACB; dunque i tre angoli del triangolo BCE equivalgono ai quattro ABC, CBE, ACB, BCE la di cui somma è 4 angoli retti. Dunque la su-
* P.22. perficie del triangolo ACE*=4--2=2 che è la quarta parte della superficie della sfera.

Scolio II. Non vi sarebbe luogo a *massimo*, se la somma dei due lati dati AB, AC fosse uguale o maggiore d'una mezza-circonferenza; poichè, siccome il triangolo ABC deve essere inscritto in un mezzo circolo della sfera, bisogna che la somma dei due lati AB, AC sia minore della mezza-circonferenza d'un circolo della sfera, e per conseguenza minore della mezza-circonferenza d'un gran circolo.

La ragione per cui non vi è *massimo*, quando la somma dei due lati dati è maggiore della mezza-circonferenza, si è perchè allora il triangolo va crescendo a misura che l'angolo compreso fra' lati dati è più grande. Finalmente, quando quest' angolo sarà uguale a due retti, i tre lati saranno in uno stesso piano, e formeranno una circonferenza intera; il triangolo sferico diventerà dunque uguale alla mezza-sfera, ma cesserà allora d'esser triangolo.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Di tutti i triangoli sferici formati con un lato dato e un perimetro dato, il più grande è quello in cui i due lati non determinati sono uguali. F. 242.

Sia AB il lato dato comune ai due triangoli ACB, ADB, e sia AC+CB=AD+DB; dico che il triangolo isoscele ACB, nel quale AC=CB è maggiore del non-isoscele ADB.

Poichè, avendo questi triangoli la parte comune AOB, basta di far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC. L'angolo CBA uguale a CAB è maggiore di OAB; onde il lato AO è maggiore di OB *; prendete OI=OB, fate OK=OD, e tirate KI; il triangolo OKI sarà uguale a DOB *. Se si nega adesso che il triangolo DOB o il suo uguale KOI sia minore di OAC, bisognerà che sia uguale, o maggiore; in ambedue i casi, siccome il punto I è fra i punti A e O, bisognerà che il punto K sia sopra OC prolungato, altrimenti il triangolo OKI sarebbe contenuto nel triangolo CAO, e perciò sarebbe minore. Posto ciò, essendo CA il più corto camino da C ad A, si ha CK+KI+IA>CA. Ma CK=OD-CO, AI=AO-OB, KI=BD; dunque OD-CO+AO-OB+BD>CA, e riducendo AD—CB+BD>CA, o AD+BD>AC+CB. Ora questa disuguaglianza è contraria alla supposizione AD+BD=AC+CB; dunque il punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque cade

* P. 16.
* P. 12.

fra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI o il suo uguale ODB è minore di ACO; dunque il triangolo isoscele ACB è maggiore del non-isoscele ADB della medesima base e del medesimo perimetro.

Scolio. Queste due ultime proposizioni sono analoghe alle proposizione I e III dell'appendice al libro IV; onde si possono dedurre per rapporto ai poligoni sferici le conseguenze che hanno luogo per i poligoni rettilinei. Ecco le principali.

1.° *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri e d'un medesimo numero di lati il maggiore ha i suoi lati uguali.*

2.° *Di tutti i poligoni sferici formati con lati dati e un ultimo a piacere, il più grande è quello che si può inscrivere in un mezzo-circolo di cui la corda del lato non determinato è il diametro.* Perchè sia possibile la soluzione bisogna che la somma dei lati dati sia minore d'una mezza-circonferenza di circolo grande.

3.° *Il maggiore dei poligoni sferici formati con lati dati è quello che si può inscrivere in un circolo della sfera.*

4.° *Il maggiore dei poligoni sferici che hanno lo stesso perimetro e il medesimo numero di lati è il poligono regolare.*

Tutte le proposizioni sul *massimo* riguardanti i poligoni sferici, si applicano agli angoli solidi di cui tali poligoni sono la misura.

APPENDICE AI LIBRI VI. E VII.

I POLIEDRI REGOLARI

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Non possono esservi che cinque poliedri regolari.

Poichè, si sono definiti per *poliedri regolari* quelli di cui tutte le faccie sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro. Queste condizioni non possono aver luogo che in un piccol numero di casi.

1.° Se le faccie sono triangoli equilateri, si può formare ciascun angolo solido del poliedro con tre angoli di questi triangoli, o con quattro, o con cinque. Quindi nascono tre corpi regolari che sono il tetraedro, l'ottaedro, e l'icosaedro. Non se ne può formare di più con dei triangoli equilateri, poichè sei angoli di questi triangoli equivalgono a quattro angoli retti, e non possono formare un angolo solido *.

* P. 21. L. V.

2.° Se le faccie sono quadrati, si possono riunire i loro angoli a tre a tre, e ne risulta l'essaedro o cubo.

Quattro angoli di quadrato equivalgono a quattro angoli retti, e non possono formare un angolo solido.

3.° Finalmente se le faccie sono pentagoni regolari, si potrà pure riunire i loro angoli a tre a tre, e ne risulterà il dodecaedro regolare.

Non si può andar più oltre; poichè tre angoli d'esagono regolare equivalgono a quattro angoli retti, e tre angoli d'eptagono sono ancor più.

Dunque non possono esservi che cinque poliedri regolari, tre formati con dei triangoli equilateri, uno con dei quadrati, ed uno con dei pentagoni.

Scolio. Si proverà nella proposizione seguente che questi cinque poliedri esistono realmente, e che se ne può determinare tutte le dimensioni quando si conosce una delle loro faccie.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA

Essendo data una faccia d'uno dei poliedri regolari, o soltanto il suo lato, descrivere il poliedro.

Questo problema ne presenta cinque, che risolveremo uno dopo l'altro.

F. 243. 1.° *Il tetraedro*. Sia ABC il triangolo equilatero che deve essere una delle faccie del tetraedro; al punto O centro di questo triangolo, alzate OS perpendicolare al piano ABC; terminate questa perpendicolare al punto S, talmente che AS=AB; tirate SB, SC, e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

Poichè, a cagione delle distanze uguali OA, OB, OC, le oblique SA, SB, SC si

allontanano ugualmente dalla perpendicolare SO e sono uguali. Una di esse SA=AB; dunque le quattro faccie della piramide SABC sono triangoli uguali al triangolo dato ABC. D' altronde gli angoli solidi di questa piramide sono uguali fra loro, poichè ciascuno di essi è formato con tre angoli piani uguali. Dunque questa piramide è un tetraedro regolare.

2.° *L'essaedro*. Sia ABCD un quadrato dato: sopra la base ABCD costruite un prisma retto la di cui altezza AE sia uguale al lato AB. È chiaro che le faccie di questo prisma saranno quadrati uguali, e che i suoi angoli solidi sono uguali fra loro, giacchè sono formati con tre angoli retti; dunque questo prisma è un essaedro regolare o cubo. F. 244.

3.° *L'ottaedro*. Sia AMB un triangolo equilatero dato: sul lato AB descrivete il quadrato ABCD; dal punto O centro di questo quadrato alzate sul suo piano la perpendicolare TS, terminata dalle due parti in T e in S talmente che OT=OS=AO; tirate dipoi SA, SB, TA, ec.: avrete un solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari SABCD, TABCD riunite per la loro base comune ABCD: questo solido sarà l'ottaedro regolare cercato. F. 245.

In fatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure il triangolo AOD: i lati AO, OS, OD sono uguali, dunque questi triangoli sono uguali, e si ha AS=AD. Si dimostrerà parimente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT, ec. sono uguali al triangolo AOD; dunque tutti i la-

ti AB, AS, AD, ec. sono uguali fra loro, e per conseguenza il solido SABCDT è compreso da otto triangoli uguali al triangolo equilatero dato ABM. Dico di più che gli angoli solidi del poliedro sono uguali fra loro; per esempio l'angolo S è uguale all'angolo B.

Poichè, è visibile che il triangolo SAC è uguale al triangolo DAC, e che perciò l'angolo ASC è retto; dunque la figura SATC è un quadrato uguale al quadrato ABCD. Ma se si paragona la piramide BASCT colla piramide SABCD, la base ASCT della prima può situarsi sulla base ABCD della seconda; allora essendo il punto O un centro comune, l'altezza OB della prima si confonderà coll'altezza OS della seconda, e le due piramidi si confonderanno in una sola; dunque l'angolo solido S è uguale all'angolo solido B; dunque il solido SABCDT è un ottaedro regolare.

Scolio. Se tre rette uguali AC, BD, ST sono perpendicolari fra loro, e si tagliano nel loro mezzo, le estremità di queste rette saranno gli angoli d'un ottaedro regolare.

F. 246. 4.° *Il dodecaedro*. Sia ABCDE un pentagono regolare dato: siano ABP, CBP due angoli piani uguali all'angolo ABC: con questi angoli piani formate l'angolo solido B, e determinate per la proposizione XXIII del Libro V l'inclinazione scambievole di due di tali piani, inclinazione che io chiamo K. Formate similmente ai punti C, D, E, A, degli angoli solidi uguali all'angolo solido B e

situati nella medesima maniera: il piano CBP sarà lo stesso che il piano BCG, poichè sono inclinati l'uno e l'altro della medesima quantità K sul piano ABCD. Si può dunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGFP uguale al pentagono ABCDE. Se si fa lo stesso in ciascuno degli altri piani CDI, DEL ec., si avrà una superficie convessa PFGH ec. composta di sei pentagoni regolari uguali, e inclinati ciascuno sul suo adiacente della medesima quantità K. Sia *pfgh* ec. una seconda superficie uguale a PFGH ec., dico che queste due superfici possono essere riunite in tal modo da formare una sola superficie convessa continuata. In fatti l'angolo *opf*, per esempio, può unirsi ai due angoli OPB, BPF, per fare un angolo solido P uguale all'angolo B; e in questa riunione non si cambierà niente l'inclinazione dei piani BPF, BPO, giacchè quest'inclinazione è qual bisogna per la formazione dell'angolo solido. Ma nel tempo stesso che si forma l'angolo solido P, il lato *pf* si applicherà sul suo uguale PF, e nel punto F si troveranno riuniti tre angoli piani PFG, *pfe*, *efg*, che formeranno un angolo solido uguale a ciascuno degli angoli già formati: questa riunione si farà senza cambiar niente lo stato dell'angolo P nè quello della superficie *efgh* ec.; poichè i piani PFG, *efp* già riuniti in P hanno fra loro l'inclinazione conveniente K, come pure i piani *efg*, *efp*. Continuando così di mano in mano, si vede che le due superfici si aggiusteranno scambievol-

mente una coll' altra, per formare una sola superficie continuata e rientrante in se stessa. Questa superficie sarà quella d'un dodecaedro regolare, poichè è composta di dodici pentagoni regolari uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono uguali fra loro.

F. 247. 5.° *L'icosaedro*. Sia ABC una delle sue faccie; bisogna prima formare un angolo solido con cinque piani uguali al piano ABC e ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente. Perciò sul lato B'C' uguale a BC fate il pentagono regolare B'C'H'I'D'; dal centro di questo pentagono alzate sul suo piano una perpendicolare che terminerete in A' in modo che B'A'=B'C'; tirate A'C', A'H', A'I', A'D', e l'angolo solido A' formato dai cinque piani B'A'C', C'A'H', ec. sarà l'angolo solido richiesto. Poichè, le oblique A'B', A'C' ec. sono uguali, una di esse A'B' è uguale al lato B'C'; dunque tutti i triangoli B'A'C', C'A'H', ec. sono uguali fra loro e al triangolo dato ABC.

È visibile d'altronde che i piani B'A'C', C'A'H', ec. sono ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente; poichè gli angoli solidi B', C', ec. sono uguali fra loro, giacchè ciascuno di essi è formato con due angoli di triangolo equilatero e uno di pentagono regolare. Chiamiamo K l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli uguali, inclinazione che si può determinare per la prop. XXIII lib. V; l'angolo K sarà nel tempo stesso l'inclinazione di ciascuno dei piani che compongono l'angolo solido A' sul suo adiacente.

Posto ciò, se si fa ai punti, A', B, C, degli angoli solidi uguali ciascuno all'angolo A', si avrà una superficie convessa DEFG ec. composta di dieci triangoli equilateri di cui ciascuno sarà inclinato sul suo adiacente della quantità K, e gli angoli D, E, F, ec. del suo contorno riuniranno alternativamente tre e due angoli del triangolo equilatero. Imaginate una seconda superficie uguale alla superficie DEFG ec.; queste due superfici potranno adattarsi scambievolmente, unendo ciascun angolo triplo dell'una con un angolo doppio dell'altra; e siccome i piani di questi angoli hanno già fra loro l'inclinazione K necessaria per formare un angolo solido quintuplo uguale all'angolo A, non si cambierà niente in questa riunione lo stato di ciascuna superficie in particolare, e le due insieme formeranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri. Questa superficie sarà quella dell'icosaedro regolare, poichè d'altronde tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Trovare l'inclinazione di ciascuna faccia d'un poliedro regolare sulla faccia adiacente.

Questa inclinazione si deduce immediatamente dalla costruzione già data dei cinque poliedri regolari; al che bisogna aggiungere la propos. XXIII del libro V, per la quale essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido, si determina l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.

Nel tetraedro. Ciascun angolo solido è formato di tre angoli di triangolo equilatero; bisogna dunque cercare col problema citato l'angolo che due di questi piani fanno fra loro, quest'angolo sarà l'inclinazione di due faccie adiacenti del tetraedro.

Nell'essaedro. L'angolo di due faccie adiacenti è un angolo retto.

Nell'ottaedro. Formate un angolo solido con due angoli di triangolo equilatero e un angolo retto, l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli sarà quella di due faccie adiacenti dell'ottaedro.

Nel dodecaedro. Ogni angolo solido è formato con tre angoli di pentagono regolare; onde l'inclinazione dei piani di due di tali angoli sarà quella di due faccie adiacenti del dodecaedro.

Nell'icosaedro. Formate un angolo solido con due angoli di triangolo equilatero, e un angolo di pentagono regolare, l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli sarà quella di due faccie adiacenti dell'icosaedro.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

F. 248. *Essendo dato il lato d'un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta a un tal poliedro*.

Bisogna prima dimostrare che ogni poliedro regolare può essere inscritto e circoscritto a una sfera.

Sia AB il lato comune a due faccie adia-

centi, siano C, ed E i centri di queste due faccie, e CD, ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali cadranno nel punto D, mezzo di questo lato. Le due perpendicolari CD, DE fanno fra loro un' angolo cognito che è uguale all' inclinazione di due faccie adiacenti determinata dal problema precedente. Ora se nel piano CDE perpendicolare ad AB, si conducono sopra CD ed ED le perpendicolari indefinite CO ed EO che s' incontrino in O, dico che il punto O sarà il centro della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta, essendo OC il raggio della prima, e OA della seconda.

In fatti, poichè gli apotemi CD, DE sono ugnali, e l' ipotenusa DO comune, il triangolo rettangolo CDO è uguale al triangolo rettangolo ODE, e la perpendicolare OC è uguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicolare al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE *, o CDE ad ABC: d' altronde CO nel piano CDE è perpendicolare a CD, intersezione comune dei piani CDE, ABC; dunque * CO è perpendicolare al piano ABC. Per la medesima ragione EO è perpendicolare al piano ABE; dunque le due perpendicolari CO, EO condotte ai piani di due faccie adiacenti dai centri di queste faccie, si incontrano in uno stesso punto O e sono uguali. Supponiamo adesso che ABC e ABE rappresentino due altre faccie adiacenti qualunque, l'apotema CD resterà sempre della medesima

* P. 17. L. V.

* P. 18. L. V.

grandezza, come pure l'angolo CDO metà di CDE; dunque il triangolo rettangolo CDO e il suo lato CO sarà uguale per rapporto a tutte le faccie del poliedro. Dunque se dal punto O come centro e col raggio OC si descrive una sfera, essa toccherà tutte le faccie del poliedro nei loro centri (poichè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari all'estremità d'un raggio) e la sfera sarà inscritta nel poliedro, o il poliedro circoscritto alla sfera.

Tirate OA, OB; a cagione di CA=CB, le due oblique OA, OB allontanandosi ugualmente dalla perpendicolare saranno uguali: sarà lo stesso di due altre linee qualunque condotte dal centro O alle estremità d'un medesimo lato; dunque tutte queste linee sono uguali fra loro. Dunque se dal punto O come centro e col raggio OA si descrive una superficie sferica, essa passerà per le sommità di tutti gli angoli solidi del poliedro, e la sfera sarà circoscritta al poliedro, o il poliedro inscritto nella sfera.

Posto ciò, la soluzione del problema proposto non ha più difficoltà veruna, e può eseguirsi così:

F. 249. Essendo dato il lato d'una faccia del poliedro, descrivete questa faccia, e sia CD il suo apotema. Cercate per il problema precedente l'inclinazione di due faccie adiacenti del poliedro, e fate l'angolo CDE uguale a quest'inclinazione. Prendete DE uguale a CD, conducete CO, ed EO perpendicolari a CD ed ED; queste due perpendicolari s'in-

contreranno in un punto O, e CO sarà il raggio della sfera inscritta nel poliedro.

Sul prolungamento di DC prendete CA uguale al raggio del circolo circoscritto a una faccia del poliedro, e OA sarà il raggio della sfera circoscritta a questo stesso poliedro.

Poichè, i triangoli rettangoli CDO, CAO della figura 249, sono uguali ai triangoli dello stesso nome nella figura 248. Onde mentre CD, e CA sono i raggi dei circoli inscritto e circoscritto a una faccia del poliedro, OD e OA sono i raggi delle sfere inscritta e circoscritta al medesimo poliedro.

Scolio. Si può dedurre dalle proposizioni precedenti diverse conseguenze.

1.° Ogni poliedro regolare può essere diviso in tante piramidi regolari quante faccie ha il poliedro: la sommità comune di queste piramidi sarà il centro del poliedro, che è nel tempo stesso centro delle sfere inscritta e circoscritta.

2.° La solidità d' un poliedro regolare è uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio della sfera inscritta.

3.° Due poliedri regolari del medesimo nome sono due solidi simili, e le loro dimensioni omologhe sono proporzionali; dunque i raggi delle sfere inscritte o circoscritte stanno fra loro come i lati di questi poliedri.

4.° Se s' inscrive un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti dal centro per i differenti lati divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni uguali e simili quante sono le faccie del poliedro.

LIBRO OTTAVO

I CORPI TONDI

DEFINIZIONI

F.250. 1. Si chiama *cilindro* il solido prodotto dalla rivoluzione d' un rettangolo ABCD, che s' imagina rivolgersi intorno il lato immobile AB.

In tal movimento i lati BC, AD restando sempre perpendicolari ad AB descrivono dei piani circolari uguali DHE, CGF che si chiamano le *basi del cilindro*, e il lato CD ne descrive la *superficie convessa*.

La linea immobile AB si chiama *l' asse del cilindro*.

Ogni sezione KLM fatta nel cilindro perpendicolarmente all' asse è un circolo uguale a ciascuna delle basi. Poichè mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea IK perpendicolare ad AB descrive un piano circolare uguale alla base, e questo piano non è altro che la sezione fatta perpendicolarmente all' asse nel punto I.

Ogni sezione PQGH fatta per l' asse è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ABCD.

F.251. 2.° Si chiama *cono* il solido prodotto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SAB che si imagina girare intorno al lato immobile SA.

In questo movimento il lato AB descrive un piano circolare BDCE, che si chiama *base del cono*, e l' ipotenusa SB ne descrive *la superficie convessa*.

Il punto S si chiama *la sommità del cono*, SA *l' asse* o *l' altezza*, e SB *il lato* o *l' apotema*.

Ogni sezione HKFI fatta perpendicolarmente all' asse è un circolo; ogni sezione SDE fatta per l' asse è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore SAB.

3. Se dal cono SCDB si toglie, mediante una sezione parallela alla base, il cono SFKH, il solido restante CBHF si chiama *cono troncato*, o *tronco di cono*. Si può supporre che sia descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, i di cui angoli A e G sono retti, intorno al lato AG. *La linea immobile* AG si chiama *asse* o *altezza del tronco*, i circoli BDC, HKF ne sono *le basi*, e BH ne è *il lato*.

4. Due cilindri o due coni sono *simili* quando i loro assi stanno fra loro come i diametri delle loro basi.

5. Se nel circolo ACD che serve di base a un cilindro si inscrive un poligono ABCDE e sulla base ABCDE si inalza un prisma retto uguale in altezza al cilindro, il prisma si dice *inscritto nel cilindro*, o il cilindro *circoscritto al prisma*. F. 252.

È chiaro che le costole AF, BG, CH, ec. del prisma, essendo perpendicolari al piano della base sono comprese nella superficie del cilindro. Dunque il prisma e il cilindro si toccano lungo queste costole.

6. Parimente se ABCD è un poligono circoscritto alla base d'un cilindro, e sulla base ABCD si costruisce un prisma retto ugua- F. 253.

le in altezza al cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro*, o il cilindro *inscritto nel prisma*.

Siano M, N, ec. i punti di contatto dei lati AB, BC ec. e siano alzate dai punti M, N, ec. le perpendicolari MX, NY ec. al piano della base; è chiaro che queste perpendicolari saranno a un tempo stesso nella superficie del cilindro e in quella del prisma circoscritto; dunque esse saranno le loro linee di contatto.

Nota. Il cilindro, il cono e la sfera sono i *tre corpi tondi* di cui si tratta negli elementi.

LEMMI PRELIMINARI SULLE SUPERFICI.

I.

F. 254. *Una superficie piana* OABCD *è minore di ogni altra superficie* PABCD *terminata al medesimo contorno* ABCD.

Questa proposizione è abbastanza evidente per esser posta nel numero degli assiomi; poichè si potrebbe supporre che il piano sia tra le superfici ciò che la linea retta è fra le linee. La linea retta è la più corta fra due punti dati, parimente il piano è la superficie più piccola fra tutte quelle che hanno un medesimo contorno. Nonostante siccome conviene ridurre gli assiomi al più piccolo numero possibile, ecco un ragionamento che non lascerà verun dubbio su questa proposizione.

Essendo la superficie un estensione in lunghezza e in larghezza, non si può concepire che una superficie sia maggiore d'un altra a meno che le dimensioni della prima non superino in qualche senso quelle della seconda;

e se accade che le dimensioni d'una superficie siano in ogni senso minori delle dimensioni d'un altra superficie, è chiaro che la prima superficie sarà la minore delle due. Ora in qualunque senso si faccia passare il piano BFD che taglierà la superficie piana in BD e l'altra superficie in BPD, la linea retta BD sarà sempre minore di BPD. Dunque la superficie piana OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

II.

Ogni superficie convessa OABCD *è minore d'un altra superficie qualunque che circondasse la prima appoggiandosi sul medesimo contorno* ABCD. F. 255.

Ripeteremo quì che intendiamo per *superficie convessa* una superficie che non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti. È per altro possibile che una linea retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa; se ne vedono degli esempi nelle superfici del cono e del cilindro. Osserveremo pure che la denominazione di *superficie convessa* non è ristretta alle sole superfici curve; comprende le *superfici poliedre* o composte di più piani, ed anche le superfici in parte curve in parte poliedre.

Ciò posto se la superficie OABCD non è minore di tutte quelle che la circondano, sia tra queste PABCD la superficie più piccola che sarà al più uguale ad OABCD. Per un punto qualunque O fate passare un piano che tocchi la superficie OABCD senza tagliarla; questo piano incontrerà la superficie PABCD, e la parte che ne reciderà sarà maggiore del

piano stesso terminato alla medesima superficie. Dunque conservando il resto della superficie PABCD, si potrebbe sostituire il piano alla parte recisa e si avrebbe una nuova superficie che circonderebbe sempre la superficie OABCD e che sarebbe minore di PABCD.

Ma questa è la minore di tutte per supposizione: dunque questa supposizione non può sussistere. Dunque la superficie convessa OABCD è minore d'ogni altra superficie che circondasse OABCD e che fosse terminata al medesimo contorno ABCD.

Scolio. Con un ragionamento intieramente simile si proverà,

F. 256. 1.° Che se una superficie convessa terminata da due contorni ABC, DEF, è circondata da un altra superficie qualunque terminata ai medesimi contorni, la superficie circondata sarà la minore di esse due.

F. 257. 2.° Che se una superficie convessa AB è circondata da tutte le parti da un altra superficie MN, o abbiano dei punti, linee o piani comuni, o non abbiano verun punto comune, la superficie circondata sarà sempre minore della superficie circondante.

Poichè, fra queste non può esservene veruna che sia un *minimo*, atteso che in qualunque supposizione si potrebbe sempre condurre il piano CD tangente alla superficie convessa, il quale sarebbe minore della superficie CMD; e però la superficie CND sarebbe minore di MN, il che è contrario all'ipotesi che MN sia un *minimo*. Dunque non v'è *minimo* al di fuori della superficie convessa; dunque questa superficie stessa è un *minimo* per rapporto a tutte quelle che la circondano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

La solidità d' un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza. F. 258.

Sia CA il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; rappresentiamo con *sup.* CA la superficie del circolo il di cui raggio è CA; dico che la solidità del cilindro sarà *sup.* CA×H. Poichè se *sup.* CA×H non è la misura d'un cilindro dato, questo prodotto sarà la misura d'un cilindro maggiore o minore. E prima supponiamo che sia la misura d' un cilindro minore, per esempio del cilindro di cui CD è il raggio della base, e H l'altezza.

Circoscrivete al circolo il di cui raggio è CD un poligono regolare GHIP, i di cui lati non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio *: imaginate dipoi un prisma retto che abbia per base il poligono GHIP, e per altezza H, il qual prisma sarà circoscritto al cilindro il raggio della di cui base è CD. Posto ciò, la solidità del prisma * è uguale alla sua base GHIP moltiplicata per l'altezza H; la base GHIP è minore del circolo di cui CA è il raggio; dunque la solidità del prisma è minore di *sup.* CA×H. Ma *sup.* CA×H è per supposizione la solidità del cilindro inscritto nel prisma; dunque il prisma sarebbe minore del cilindro contenuto nel prisma; il che è assurdo. Dunque è impossibile che *sup.* CA×H sia la misura del cilindro la di cui base ha per raggio CD, e la di cui altezza è H, o in termini più generali, *il prodotto della base d' un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore.*

* P. 10. L. IV.

* P. 14. L. VI.

Dico in secondo luogo che questo stesso

prodotto non può misurare un cilindro maggiore. Poichè, per non moltiplicare le figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia se è possibile, *sup.* CD×H la misura d'un cilindro maggiore, per esempio del cilindro la di cui base ha per raggio CA, e la di cui altezza è sempre H.

Se si fa la stessa costruzione del primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura GHIP×H; l'area GHIP è maggiore di *sup.* CD; dunque la solidità del prisma di cui si tratta è maggiore di *sup.* CD×H: il prisma sarebbe dunque maggiore del cilindro della medesima altezza che ha per base *sup.* CA. Ora all'opposto il prisma è minore del cilindro, poichè v'è contenuto. Dunque *è impossibile che la base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura d'un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la solidità d'un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e i cilindri della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Corollario II. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Poichè, le basi stanno come i quadrati dei loro diametri, e siccome i cilindri sono simili, i diametri delle basi stanno come le altezze *: dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze; dunque le basi moltiplicate per l'altezze, o i cilindri stessi stanno come i cubi delle altezze.

*Def.4

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cilindro, H la sua altezza, la superficie della

base sarà pR^2 *, e la solidità del cilindro sarà $pR^2 \times H$, o pR^2H. * P. 12. L. IV.

PROPOSIZIONE II.

LEMMA

La superficie convessa d'un prisma retto è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza. F. 251.

Poichè questa superficie è uguale alla somma dei rettangoli AFGB, BGHC, CHID, ec. di cui è composta; ora le altezze AF, BG, CH, ec. di questi rettangoli sono uguali all'altezza del prisma; le loro basi AB, BC, CD, ec. prese insieme fanno il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli, o la superficie convessa del prisma è uguale al perimetro della base moltiplicato per la sua altezza.

Corollario. Se due prismi retti hanno la medesima altezza, le superfici convesse di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle loro basi.

PROPOSIZIONE III.

LEMMA

La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa di ogni prisma inscritto, e minore della superficie convessa di ogni prisma circoscritto. F. 252.

Questa proposizione potrebbe comparire assai evidente da se stessa: nonostante la dimostreremo presso a poco nello stesso modo dei lemmi preliminari.

1.° Se la superficie convessa del cilindro non è maggiore di quella d'ogni prisma inscritto, bisognerà che fra' prismi inscritti ve ne sia uno la di cui superficie sia la maggiore di tutte. Sia ABCDE la base di questo

prisma, e AF l'altezza comune al prisma e al cilindro: la superficie che si suppone un *massimo* sarà uguale ad AF moltiplicata per il contorno ABCDE. Ma se si prende a capriccio il punto M sull'arco AME è chiaro che AM+ME>AE, e che perciò il contorno ABCDEM è maggiore del contorno ABCDE. Dunque il prisma inscritto che avesse per base ABCDEM ha una superficie maggiore di quello che ha per base ABCDE; dunque la superficie di questo non può essere la maggiore di tutte, contro la supposizione. Dunque 1.° la superficie convessa del cilindro è maggiore di quella d'ogni prisma inscritto.

F. 253. 2.° Questa medesima superficie è minore di quella d'ogni prisma circoscritto. Poichè altrimenti, fra' prismi circoscritti ve ne sarebbe uno, la di cui superficie sarebbe la minore di tutte. Sia ABCD la base di questo prisma, e sia sempre AF l'altezza comune al prisma e al cilindro: la superficie che si suppone un *minimo* sarà uguale ad AF moltiplicata per il contorno ABCD. Ma conducendo a piacere nell'angolo A la tangente KL, è chiaro che KL<AL+AK, e che perciò il contorno BCDKL è minore di ABCD. Dunque, essendo uguali l'altezze, la superficie del prisma che avesse per base BCDKL sarebbe minore di quella del prisma la di cui base è ABCD; dunque quest'ultima non è la minore di tutte. Dunque 2.° la superficie convessa del cilindro è minore di quella d'ogni prisma circoscritto.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

F. 258. *La superficie convessa d'un cilindro è uguale*

alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Sia CA il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza, se si rappresenta con *circ.* CA la circonferenza che ha per raggio CA, dico che *circ.* CA×H sarà la superficie convessa di questo cilindro. Poichè se ciò si nega, bisognerà che *circ.* CA×H sia la superficie d' un cilindro maggiore o minore; e prima supponiamo che sia la superficie d' un cilindro minore, per esempio del cilindro la di cui base ha per raggio CD, e la di cui altezza è H.

Circoscrivete al circolo il di cui raggio è CD un poligono regolare GHIP, i di cui lati non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio; imaginate dipoi un prisma retto che abbia per altezza H e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l' altezza H *: questo contorno è minore della circonferenza il di cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ.* CA×H. Ma *circ.* CA×H è per supposizione la superficie convessa del cilindro la di cui base ha per raggio CD, il qual cilindro è inscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro inscritto. Ora al contrario dev' essere maggiore; dunque la supposizione da cui siamo partiti è assurda. Dunque 1.° *la circonferenza della base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa d' un cilindro minore.*

* P. 2.

Dico in secondo luogo che questo medesimo prodotto non può misurare la superficie

d' un cilindro maggiore. Poichè, per non cambiar figura, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s'è possibile, *circ.* CD×H la superficie convessa d' un cilindro che colla medesima altezza avesse una base maggiore, per esempio il circolo il di cui raggio è CA. Si farà la medesima costruzione della prima supposizione, e la superficie convessa del prisma sarà sempre uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l altezza H. Ma questo contorno è maggiore di *circ.* CD; dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di *circ.* CD×H che per supposizione è la superficie del cilindro della medesima altezza la di cui base ha per raggio CA. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella di questo cilindro. Ma quand'anche il prisma fosse inscritto nel cilindro, la sua superficie sarebbe minore di quella del cilindro; molto più essa è minore quando il prisma non arriva fino al cilindro. Dunque la seconda supposizione è assurda quanto la prima. Dunque 2.° *la circonferenza della base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie d' un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la superficie convessa di un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

F. 259. *La solidità d' un cono è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.*

Sia SOA il triangolo rettangolo che colla sua rivoluzione intorno a SO descrive il cono dato; dico che la solidità di questo cono sarà uguale a *sup.* AO×$\frac{1}{3}$SO.

In fatti supponiamo 1.° che *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO sia la solidità d'un cono maggiore, per esempio del cono della stessa altezza SO che abbia per raggio della sua base OB maggiore di AO.

Al circolo il di cui raggio è AO circoscrivete un poligono regolare MNPT che non incontri la circonferenza il di cui raggio è OB *; imaginate quindi una piramide che abbia per base il poligono e per sommità il punto S. La solidità di questa piramide * è uguale all'area del poligono MNPT moltiplicata per la terza parte dell'altezza SO. Ma il poligono è maggiore del circolo inscritto rappresentato da *sup.* AO; dunque la piramide è maggiore di *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO che per supposizione è la misura del cono di cui S è la sommità e che ha OB per raggio della base. Ora al contrario la piramide è minore del cono, poichè vi è contenuta. Dunque 1.° è impossibile che la base d'un cono moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura di un cono maggiore.

* P. 10. L. IV.

* P. 19. L. VI.

Dico 2.° che questo medesimo prodotto non può essere la misura d'un cono minore. Poichè, per non cambiar figura, sia OB il raggio della base del cono dato, e sia, s'è possibile, *sup.* OB$\times\frac{1}{3}$SO la solidità del cono che ha per altezza SO, e per base *sup.* AO. Si farà la medesima costruzione di sopra, e la piramide SMNP ec. avrà per misura il poligono MNP ec. moltiplicato per $\frac{1}{3}$SO. Ma il poligono è minore di *sup.* OB; dunque la piramide è minore di *sup.* OB$\times\frac{1}{3}$SO, e però minore del cono che ha AO per raggio della base e SO per altezza. Ora al contrario la piramide è maggiore del cono, poichè il cono vi è contenuto. Dunque 2.° è impossi-

bile che la base d'un cono moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura d'un cono minore.

Dunque finalmente la solidità di un cono è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

Corollario. Dunque un cono è la terza parte d'un cilindro della medesima base e della medesima altezza; e da ciò segue;

1.° Che i coni d'uguale altezza stanno fra loro come le loro basi;

2.° Che i coni di basi uguali stanno fra loro come le loro altezze;

3.° Che i coni simili stanno come i cubi dei diametri delle loro basi, o come i cubi delle loro altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $pR^2 \times \frac{1}{3}H$, o $\frac{1}{3}pR^2H$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

F. 260. *Il cono troncato* ADEB, *di cui* OA e PD *sono i raggi delle basi*, e PO *l'altezza*, *ha per misura* $\frac{p}{3}\,OP(\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$.

Sia TFGH una piramide triangolare della medesima altezza del cono SAB, e la di cui base FGH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi siano situate sopra un medesimo piano; allora le sommità T e S saranno a distanze uguali dal piano, e il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora io dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE. Poichè, le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP *, o come i quadrati delle altezze SO, SP; i trian-

* P. 11 L. IV.

goli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze *; dunque i circoli AB, DE stanno fra loro come i triangoli FGH, IKL. Ma per supposizione il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al circolo DE.

* P. 15. L. VI.

Ora la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la misura del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO lo è della piramide TFGH; dunque a motivo delle basi equivalenti, la piramide è equivalente al cono. Per una simil ragione la piramide TIKL è equivalente al cono SDE: dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide FHGIKL. Ma la base FGH, equivalente al circolo il di cui raggio è AO, ha per misura $p\times\overline{AO}^2$; parimente la base IKL$=p\times\overline{DP}^2$, e la media proporzionale fra $p\times\overline{AO}^2$, e $p\times\overline{DP}^2$ è $p\times AO\times DP$. Dunque la solidità del tronco di piramide, o sia quella del tronco di cono ha per misura $\frac{1}{3}OP\times(p\times\overline{AO}^2+p\times\overline{DP}^2+p\times AO\times DP)$* che è lo stesso che $\frac{p}{3}\times OP\times(\overline{AO}^2+\overline{DP}^2+AO\times DP)$.

* P. 20. L. VI.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

La superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato. F. 259.

Sia AO il raggio della base del cono dato, S la sua sommità, e SA il suo lato; dico che la sua superficie sarà *circ.* $AO\times\frac{1}{2}SA$. Poichè sia, se è possibile, *circ.* $AO\times\frac{1}{2}SA$ la superficie d'un cono che avesse per sommi-

tà il punto S e per base il circolo descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivete al circolo minore un poligono regolare che non arrivi al maggiore, e imaginate la piramide regolare SMNPQ ec. che avesse per base il poligono e per sommità il punto S. Il triangolo SMN uno di quelli che compongono la superficie convessa della piramide ha per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell' altezza SA, che è nel tempo stesso il lato del cono dato; essendo uguale quest' altezza in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ, ec. ne segue che la superficie convessa della piramide è uguale al contorno MNPQR ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$SA. Ma il contorno MNPQR ec. è maggiore del *circ.* AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.* AO$\times\frac{1}{2}$SA, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono che colla medesima sommità S avesse per base il circolo descritto col raggio OB. Ora al contrario la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide; perchè se si congiunge base con base la piramide a una piramide uguale, il cono a un cono uguale, la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi; dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda; dunque la superficie del cono è maggiore di quella della piramide che vi è compresa. Dalla nostra supposizione nasceva il contrario; dunque questa supposizione non può aver luogo: dunque 1.° la circonferenza della base d' un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie d' un cono maggiore.

Dico 2.° che lo stesso prodotto non può

misurare la superficie d' un cono minore. Poichè, sia BO il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *circ.*$BO\times\frac{1}{2}SB$ la superficie del cono di cui S è la sommità, e AO minore di OB il raggio della base.

Avendo fatto la medesima costruzione di sopra, la superficie della piramide SMNP ec. sarà sempre uguale al contorno MNP ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}SA$. Ora il contorno MNP ec. è minore di *circ.* BO, SA è minore di SB; dunque per questa doppia ragione la superficie convessa della piramide è minore di *circ.* $BO\times\frac{1}{2}SB$, che per supposizione è la superficie del cono della di cui base il raggio è AO; dunque la superficie della piramide sarebbe minore di quella del cono inscritto. Ora al contrario è maggiore: poichè congiungendo base con base la piramide a una piramide uguale, il cono a un cono uguale, la superficie delle due piramidi circonderà quella dei due coni, e per conseguenza sarà la maggiore. Dunque 2.° è impossibile che la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato misuri la superficie d'un cono minore.

Dunque finalmente la superficie convessa d' un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

La superficie convessa del tronco di cono ADEB *è uguale al suo lato* AD *moltiplicato per la mezza-somma delle circonferenze delle sue due basi* AB, DE. F. 261.

Nel piano SAB che passa per l'asse SO, conducete perpendicolarmente a SA la linea

AF uguale alla circonferenza che ha per raggio AO; tirate SF, e conducete DH parallela ad AF.

A motivo dei triangoli simili SAO, SDC si avrà AO : DC : : SA : SD, e a cagione dei triangoli simili SAF, SDH, si avrà AF : DH : : SA : SD; dunque AF : DH : : AO : DC, o : : *circ.* AO : *circ.* DC *. Ma per costruzione AF=*circ.*AO; dunque DH=*circ.*DC. Posto ciò, il triangolo SAF che ha per misura $AF \times \frac{1}{2}SA$ è uguale alla superficie del cono SAB che ha per misura $circ.AO \times \frac{1}{2}SA$. Per una simil ragione il triangolo SDH è uguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADEB è uguale a quella del trapezio ADHF. Questa ha per misura * $AD \times \left(\frac{AF+DH}{2}\right)$; dunque la superficie del tronco di cono ADEB è uguale al suo lato AD moltiplicato per la mezza somma delle circonferenze delle sue due basi.

* P. 11. L. IV.

* P. 7. L. III.

Corollario. Per il punto I mezzo di AD conducete IKL parallela ad AB, e IM parallela ad AF: si dimostrerà come sopra che IM=*circ.*IK. Ma il trapezio $ADHF = AD \times IM = AD \times circ.IK$. Dunque *la superficie d'un tronco di cono è uguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza d'una sezione fatta a uguali distanze dalle due basi*.

F. 262. *Scolio*. Se una linea AD situata tutta intiera da una medesima parte della linea OC e nello stesso piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD avrà per misura $AD \times \left(\frac{circ.AO + circ.DC}{2}\right)$, o $AD \times circ.IK$, essendo le linee AO, DC,

IK perpendicolari abbassate dalle estremità e dal mezzo della linea AD sopra l'asse OC.

Poichè, se si prolungano AD, ed OC finchè s'incontrino scambievolmente in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella d'un cono troncato delle di cui basi AO, e DC sono i raggi, avendo il cono intiero per sommità il punto S. Dunque questa superficie avrà la misura indicata.

Questa misura avrebbe sempre luogo quand' anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intiero, ed anche quando la linea AD fosse parallela all' asse, il che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nullo, nel secondo DC sarebbe uguale ad AO, e a IK.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Siano AB, BC, CD *più lati successivi d' un poligono regolare,* O *il suo centro, e* OI *il raggio del circolo inscritto; se si suppone che la porzione di poligono* ABCD *situata tutta da una medesima parte del diametro* FG *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, là superficie descritta da* ABCD *avrà per misura* MQ $\times$circ.OI, *essendo* MQ *l' altezza di questa superficie o la parte dell' asse compresa fra le perpendicolari estreme* AM, DQ. F.263.

Essendo il punto I il mezzo di AB, ed essendo IK una perpendicolare all' asse abbassata dal punto I, la superficie descritta da AB avrà per misura AB$\times$*circ.*IK. Conducete AX parallela all'asse, i triangoli ABX, OIK avranno i lati respettivamente perpendicolari, cioè OI ad AB, IK ad AX, e OK a BX; dunque

questi triangoli sono simili, e danno la proporzione AB : AX o MN :: OI : IK o :: *circ.* OI : *circ.* IK; dunque AB× *circ.*IK=MN×*circ.* OI. Donde segue che la superficie descritta da AB è uguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del circolo inscritto. Parimente la superficie descritta da BC, =NP× *circ.* OI; la superficie descritta da CD, =PQ× *circ.* OI. Dunque la superficie descritta dalla porzione di poligono ABCD ha per misura (MN+NP+PQ)× *circ.* OI, o MQ× *circ.* OI; dunque è uguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza del circolo inscritto.

Corollario. Se il poligono intiero è d' un numero pari di lati, e se l'asse FG passa per due angoli opposti F, e G, la superficie intiera descritta dalla rivoluzione del mezzo-poligono FACG sarà uguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del circolo inscritto. Quest' asse FG sarà nel tempo stesso il diametro del circolo circoscritto.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

F.264. *La superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza d' un circolo grande.*

Dico 1.° che il diametro d' una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore. Poichè sia, se è possibile AB×*circ.*AC la superficie della sfera che ha per raggio CD.

Al circolo che ha per raggio CA, circoscrivete un poligono regolare d' un numero pari di lati che non incontri la circonferenza il di cui raggio è CD; siano M e S due angoli opposti di questo poligono; e intorno

al diametro MS fate girare il mezzo-poligono MPS. La superficie descritta da questo poligono avrà per misura MS×*circ.*AC; ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal poligono è maggiore di AB×*circ.* AC, e per conseguenza maggiore della superficie della sfera il di cui raggio è CD. Ora al contrario la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal poligono, poichè la prima circonda la seconda da tutte le parti. Dunque 1.° il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore.

Dico 2.° che questo stesso prodotto non può misurare la superficie d'una sfera minore. Poichè sia, se è possibile, DE×*circ.*CD la superficie della sfera che ha per raggio CA. Si farà la medesima costruzione del primo caso, e la superficie del solido generato dal poligono sarà sempre uguale a MS×*circ.* AC. Ma MS è minore di DE, e *circ.* AC minore di *circ.* CD; dunque con doppia ragione la superficie del solido prodotto dal poligono è minore di DE×*circ.*CD, e per conseguenza minore della superficie della sfera il di cui raggio è AC. Ora al contrario la superficie descritta dal poligono è maggiore della superficie della sfera descritta col raggio AC, poichè la prima superficie circonda la seconda; dunque 2.° il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può esser la misura della superficie d'una sfera minore.

Dunque la superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo.

Corollario. La superficie del gran circolo si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio o per la quarta parte del diametro, dunque *la superficie della sfera è quadrupla di quella d' un gran circolo*.

Scolio. Essendo così misurata la superficie della sfera, e paragonata a superfici piane, sarà facile d'avere il valore assoluto dei fusi, e triangoli sferici, di cui si è determinato di sopra il rapporto coll' intiera superficie della sfera.

Primieramente il fuso il di cui angolo è A stà alla superficie della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti *, o come l' arco di gran circolo che misura l'angolo A sta alla circonferenza di questo medesimo gran circolo. Ma la superficie della sfera è uguale a questa circonferenza moltiplicata per il diametro; dunque la superficie del fuso è uguale all' arco che misura l'angolo di questo fuso moltiplicato per il diametro.

* P.20. L.VII.

In secondo luogo ogni triangolo sferico è equivalente a un fuso il di cui angolo è uguale alla metà dell'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti *. Siano dunque P, Q, R gli archi di gran circolo che misurano i tre angoli del triangolo; sia C la circonferenza d'un gran circolo, e D il suo diametro; il triangolo sferico sarà equivalente al fuso il di cui angolo ha per misura $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, e per conseguenza la sua superficie sarà $D\times\left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}\right)$.

* P.22. L.VII.

Onde, nel caso del triangolo tri-rettangolo, ciascuno degli archi P, Q, R è uguale

a $\frac{1}{4}$C, la loro somma è $\frac{3}{4}$C, l'eccesso di questa somma sopra $\frac{1}{2}$C è $\frac{1}{4}$C, e la metà di quest' eccesso $=\frac{1}{8}$C; dunque la superficie del triangolo trirettangolo $=\frac{1}{8}C\times D$, che è l'ottava parte della superficie totale della sfera.

La misura dei poligoni sferici nasce immediatamente da quella dei triangoli, e d'altronde è intieramente determinata dalla prop. XXIII. Lib. VII., giacchè l'unità di misura, che è il triangolo trirettangolo, si è ora valutata in superficie piana.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

La superficie d'una zona sferica qualunque è uguale all' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo. F. 265.

Sia primieramente AB un arco minore, o non maggiore del quarto della circonferenza, sia abbassata la perpendicolare BD dall'estremità di quest'arco sul raggio AC che passa per l'altra estremità, dico che se l'arco AB fa una rivoluzione intorno ad AC, la zona descritta avrà per misura AD×*circ*.AC.

Poichè 1.° sia, se è possibile, AD×*circ*.AC la misura della superficie descritta dall'arco maggiore EI che si rivolge intorno al medesimo asse ed è terminato alla stessa perpendicolare DB. Inscrivete nell' arco EI una porzione di poligono regolare i di cui lati non incontrino l'arco concentrico AB *. Mentre l'arco EI girando intorno ad ED descrive una zona sferica, il poligono EFGHI descriverà una superficie curva che ha per misura ED×*circ*.CK *, essendo CK la perpendicolare abbassata dal centro sopra un lato EF. Ma ED è maggiore di AD, CK è mag-

* P. 10. L. IV.

* P. 9.

giore di AD, CK è maggiore di AC; per questa doppia ragione ED$\times$ *circ.* CK è maggiore di AD$\times$ *circ.*AC, che per supposizione è la superficie della zona descritta dall' arco EI. Dunque la superficie descritta dal poligono EFGHI, sarebbe maggiore della zona descritta dall' arco circoscritto EI. Ora al contrario la zona è maggiore della superficie curva poligona, poichè la circonda da tutte le parti; dunque 1.° è impossibile che l' altezza della zona data moltiplicata per la circonferenza del gran circolo sia la misura d' una zona maggiore.

Dico 2.° che questo stesso prodotto non può essere la misura d' una zona minore. Poichè sia, se è possibile, ED$\times$*circ.*EC la misura della zona descritta dall' arco AB. Restando la stessa la costruzione precedente, la superficie descritta dal poligono EFGHI sarà sempre ED$\times$*circ.*CK. Ma CK è minore di EC; dunque la superficie curva poligona è minore di ED$\times$*circ.*EC, e perciò minore per supposizione della zona descritta dall' arco AB. Ora al contrario la superficie poligona è maggiore della zona, poichè se si applica base con base la superficie poligona a una superficie uguale, la zona a una zona uguale, la doppia superficie poligona circonderà da ogni parte la doppia zona, e sarà perciò maggiore, giacchè d' altronde, l' arco AB non superando la quarta parte della circonferenza, la doppia zona non cesserebbe d' essere una superficie convessa; dunque 2.° è impossibile che l' altezza della zona data moltiplicata per la circonferenza del gran circolo, sia la misura d' una zona minore.

Segue da ciò che la zona descritta dall' ar-

co AB ha per misura AD×*circ.*AC, almeno finchè l'arco AB non supera la quarta parte della circonferenza. Ma la sfera intiera composta di due zone descritte dagli archi AB, BM ha per misura AM×*circ.* AC, o AD×*circ.*AC+DM×*circ.*AC; dunque poichè AD×*circ.* AC è la zona descritta dall'arco AB, DM×*circ.*AC sarà la zona descritta dall'arco BM maggiore della quarta parte della circonferenza; dunque *ogni zona d'una sola base ha per misura la sua altezza moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo*.

Consideriamo finalmente una zona qualunque descritta dalla rivoluzione dell'arco PB intorno all'asse AM, e siano abbassate sopra l'asse le due perpendicolari BD, PQ. La zona descritta dall'arco BM ha per misura DM×*circ.*AC; la zona descritta dall'arco PM ha per misura MQ×*circ.*AC; dunque la differenza di queste due zone, o la zona descritta dall'arco BP ha per misura (DM−MQ) ×*circ.*AC, o DQ×*circ.*AC. Dunque ogni zona sferica d'una o due basi ha per misura l'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo.

Corollario. Due zone stanno fra loro come le loro altezze, e una zona qualunque stà alla superficie della sfera come l'altezza della zona stà al diametro.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se il triangolo BAC, *e il rettangolo* BCEF *della medesima base e della medesima altezza girano simultaneamente intorno alla base comune* BC, *il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà la terza parte del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo.* F. 266.

Abbassate sull'asse la perpendicolare AD; il cono descritto dal triangolo ABD è la terza parte del cilindro descritto dal rettangolo
* P. 5. AFBD *; parimente il cono descritto dal triangolo ADC è la terza parte del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni, o il solido descritto da ABC è la terza parte della somma dei due cilindri, o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF.

F. 267. Se la perpendicolare AD cadesse fuori del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarebbe la differenza dei coni descritti da ABD, ACD: ma nel tempo stesso il cilindro descritto da BCEF sarebbe la differenza dei cilindri descritti da AFBD, AECD. Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà sempre la terza parte del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo della medesima base e della medesima altezza.

Scolio. Il circolo di cui AD è il raggio ha per superficie $p \times \overline{AD}^2$; dunque $p \times \overline{AD}^2 \times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, e $\frac{p}{3} \times \overline{AD}^2 \times BC$ è la misura del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA

F. 268. *Supponendosi che il triangolo* CAB *faccia una rivoluzione intorno la linea* CD *condotta a piacere fuori del triangolo da uno dei suoi angoli* C, *trovare la misura del solido così generato.*

Prolungate il lato AB finchè incontri l'asse CD in D, dai punti A e B abbassate sull'asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo ADC ha per misura, secondo la proposizione precedente,

$\frac{p}{3}\times\overline{AM}^2\times CD$; il solido descritto dal triangolo CBD ha per misura $\frac{p}{3}\overline{BN}^2\times CD$; dunque la differenza di questi solidi, o il solido descritto da ABC avrà per misura $\frac{p}{3}(\overline{AM}^2-\overline{BN}^2)\times CD$.

Si può dare un altra forma a quest'espressione. Dal punto I mezzo di AB, conducete IK perpendicolare a CD, e per il punto B conducete BO parallela a CD, si avrà $AM+BN=2IK$ *; e $AM-BN=AO$ dunque $(AM+BN)(AM-BN)$, o $\overline{AM}^2-\overline{BN}^2=2IK\times AO$ *. La misura del solido di cui si tratta è dunque espressa ancora da $\frac{2p}{3}IK\times AO\times CD$.

* P. 7. L. III.

* P. 18. L. III.

Ma se si abbassa CP perpendicolare sopra AB, i triangoli ABO, DCP saranno simili, e daranno la proporzione AO : CP :: AB : CD; d'onde resulta $AO\times CD=CP\times AB$; d'altronde $CP\times AB$ è il doppio dell'area del triangolo ABC; onde si ha $AO\times CD=2ABC$, dunque il solido descritto dal triangolo ABC ha ancora per misura $\frac{4}{3}p\times ABC\times KI$, o, il che è lo stesso, $ABC\times\frac{2}{3}circ.KI$; (poichè $circ.IK=2pIK$). *Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo* ABC *ha per misura l'area di questo triangolo moltiplicata per i due terzi della circonferenza che descrive nel girare il punto* I *mezzo della base*.

Corollario. Se il lato $AC=CB$, la linea CI sarà perpendicolare ad AB, l'area ABC sarà uguale ad $AB\times\frac{1}{2}CI$, e la solidità $\frac{4}{3}p\times ABC\times IK$ diventerà $\frac{2}{3}p\times AB\times IK\times CI$. Ma i triangoli ABO, CIK sono simili e danno la proporzione AB : BO o MN :: CI : IK; dunque $AB\times IK=MN\times CI$; dunque il solido de-

F. 269.

scritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura $\frac{2}{3}p \times MN \times \overline{CI}^2$.

Scolio. La dimostrazione precedente sembra supporre che la linea AB prolungata incontri l'asse; ma i resultati sarebbero ugualmente veri, quando la linea AB fosse parallela all'asse.

F. 270. In fatti il cilindro descritto da AMBN ha per misura $p\overline{AM}^2 . MN$, il cono descritto da $ACM = \frac{p}{3}\overline{AM}^2 . CM$, e il cono descritto da $BCN = \frac{p}{3}\overline{AM}^2 . CN$. Aggiungendo insieme i due primi solidi, e togliendone il terzo si avrà per il solido descritto da ABC, $p.\overline{AM}^2 . (MN + \frac{1}{3}CM - \frac{1}{3}CN)$: ora, a motivo di $CN - CM = MN$, quest' espressione si riduce a $p\overline{AM}^2 . \frac{2}{3}MN$, o $\frac{2p}{3}\overline{CP}^2 . MN$, il che si accorda coi resultati già trovati.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

F. 263. *Siano* AB, BC, CD *più lati successivi d'un poligono regolare*, O *il suo centro e* OI *il raggio del circolo inscritto; se s'imagina che il settore poligono* AOD *situato da una stessa parte del diametro* FG *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura* $\frac{2p}{3}\overline{OI}^2 . MQ$, *essendo* MQ *la porzione dell' asse terminata dalle perpendicolari estreme* AM, DQ.

In fatti poichè il poligono è regolare, tutti i triangoli AOB, BOC ec. sono uguali ed isosceli. Ora il solido prodotto dal triangolo isoscele AOB ha per misura, secondo il corolla-

rio della proposizione precedente $\frac{2p}{3}\overline{OI}^2.MN$, il solido descritto dal triangolo BOC ha per misura $\frac{2p}{3}\overline{OI}^2.NP$, e il solido descritto dal triangolo COD ha per misura $\frac{2p}{3}\overline{OI}^2.PQ$. Dunque la somma di questi solidi, o il solido intiero descritto dal settore poligono AOD avrà per misura $\frac{2p}{3}.\overline{OI}^2.(MN+NP+PQ)$ ò $\frac{2p}{3}\overline{OI}^2.MQ$.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata per la terza parte del raggio, e la sfera intiera ha per misura la sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio. F. 271.

Sia ABC il settore circolare che colla sua rivoluzione intorno ad AC descrive il settore sferico, la zona descritta da AB essendo AD$\times$ *circ.* AC, o 2pAC. AD, dico che il settore sferico avrà per misura questa zona moltiplicata per $\frac{1}{3}$ AC, o sia $\frac{2p}{3}\overline{AC}^2$. AD.

In fatti, 1.° supponiamo, se è possibile, che questa quantità $\frac{2p}{3}\overline{AC}^2$. AD sia la misura d'un settore sferico maggiore, per esempio del settore sferico descritto dal settore circolare ECF.

Inscrivete nell' arco EF la porzione di poligono regolare EMNPOF i di cui lati non incontrino l'arco AB, imaginate quindi che il settore poligono ENFC giri intorno ad EC nel medesimo tempo del settore circolare ECF. Sia CI il raggio del circolo inscritto nel poligono, e sia abbassata FG perpendicolare sopra EC. Il solido descritto dal settore poligono avrà per misura $\frac{2p}{3}\overline{CI}^2\times EG$*: ora CI è maggiore di AC *P. 14.

per costruzione, ed EG è maggiore di AD: poichè CG : CD :: CF : CB, o CG : CD :: CE : CA; dunque *dividendo* CE—CG : CA —CD :: CE : CA, o EG : AD :: CE : CA; dunque EG>AD.

Per questa doppia ragione $\frac{2p}{3}\times\overline{CI}^2\times EG$ è maggiore di $\frac{2p}{3}\overline{CA}^2\times AD$; la prima espressione è la misura del solido descritto dal settore poligono, la seconda è per supposizione quella del settore sferico descritto dal settore circolare ECF; dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe maggiore del settore sferico descritto dal settore circolare ECF. Ora all'opposto è evidente che il solido di cui si parla è minore del settore sferico, giacchè vi è contenuto. Dunque la supposizione dalla quale siamo partiti non può sussistere. Dunque 1.° la zona o base d'un settore sferico moltiplicata per la terza parte del raggio non può misurare un settore sferico maggiore.

Dico 2.° che il medesimo prodotto non può misurare un settore sferico minore. Poichè sia CEF il settore circolare che colla sua rivoluzione produce il settore sferico dato, e supponiamo, se è possibile, che $\frac{2p}{3}\overline{CE}^2\times EG$ sia la misura d'un settore sferico minore, per esempio di quello che è prodotto dal settore circolare ACB.

Restando la stessa la costruzione precedente, il solido descritto dal settore poligono avrà sempre per misura $\frac{2p}{3}\overline{CI}^2.EG$. Ma CI è minore di CE; dunque il solido è minore di $\frac{2p}{3}\overline{CE}^2.EG$, che per supposizione è la misura del settore circolare ACB. Dunque il solido descritto dal

settore poligono sarebbe minore del settore sferico descritto da ACB; ora all'opposto è evidente che il solido è maggiore del settore sferico, poichè questo è contenuto in quello. Dunque 2.° è impossibile che la zona d'un settore sferico moltiplicata per la terza parte del raggio sia la misura d'un settore sferico minore.

Dunque ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata per la terza parte del raggio.

Un settore circolare ACB può aumentare fino a divenire uguale al mezzo-circolo, allora il settore sferico descritto dalla sua rivoluzione è la sfera intiera. Dunque *la solidità della sfera è uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio.*

Corollario. Stando le superfici delle sfere come i quadrati dei loro raggi, queste superfici moltiplicate per i raggi staranno come i cubi dei raggi. Dunque *le solidità di due sfere stanno come i cubi dei loro raggi, o come i cubi dei loro diametri.*

Scolio. Sia R il raggio d'una sfera, la sua superficie sarà $4pR^2$, e la sua solidità $4pR^2 \times \frac{1}{3}R$, o $\frac{4}{3}pR^3$. Se si chiama D il diametro, a motivo di $R = \frac{1}{2}D$, si ha $R^3 = \frac{1}{8}D^3$, e la solidità si esprime ancora con $\frac{4}{3}p \times \frac{1}{8}D^3$, o $\frac{1}{6}pD^3$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

La superficie della sfera stà alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprendendovi le sue basi) come 2 stà a 3. Le solidità di questi due corpi stanno fra loro nel medesimo rapporto. F. 272.

Sia MPNQ il gran circolo della sfera, ABCD il quadrato circoscritto: se si fa girare insieme il mezzo-circolo PMQ e il mezzo-quadrato PADQ intorno al diametro PQ, il mezzo-

circolo descriverà la sfera, e il mezzo-quadrato descriverà il cilindro circoscritto alla sfera.

L'altezza AD di questo cilindro è uguale al diametro PQ, la base del cilindro è uguale al gran circolo, giacchè ha per diametro AB uguale a MN; dunque la superficie convessa del cilindro * è uguale alla circonferenza del gran circolo moltiplicata per il suo diametro. Questa misura è la medesima di quella della superficie della sfera *: d'onde segue che *la superficie della sfera è uguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto.*

* P. 4.
* P. 10.

Ma la superficie della sfera è uguale a quattro gran circoli; dunque la superficie convessa del cilindro circoscritto è anch'essa uguale a quattro gran circoli: se vi si aggiungono le due basi che equivalgono a due gran circoli, la superficie totale del cilindro circoscritto sarà uguale a sei gran circoli; dunque la superficie della sfera stà alla superficie totale del cilindro circoscritto come 4 stà a 6, o come 2 stà a 3. Quest'è il primo punto che si trattava di dimostrare.

In secondo luogo poichè la base del cilindro circoscritto è uguale a un gran circolo, e la sua altezza al diametro, la solidità del cilindro sarà uguale al gran circolo moltiplicato per il diametro *. Ma la solidità della sfera è uguale a quattro gran circoli moltiplicati per la terza parte del raggio *, il che è lo stesso che un gran circolo moltiplicato per $\frac{4}{3}$ del raggio, o per $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque la sfera stà al cilindro circoscritto come 2 sta a 3, e per conseguenza le solidità di questi due corpi stanno fra loro come le loro superfici.

* P. 1.
* P. 15.

Scolio. Se s'imagina un poliedro, tutte le

di cui faccie tocchino la sfera, questo poliedro potrà considerarsi come composto di piramidi che hanno tutte per sommità il centro della sfera, e le di cui basi sono le differenti faccie del poliedro. Ora è chiaro che tutte queste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera, talmente che ogni piramide sarà uguale alla faccia del poliedro che gli serve di base moltiplicata per la terza parte del raggio; dunque il poliedro intiero sarà uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio della sfera inscritta.

Si vede da ciò che le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno fra loro come le superfici di questi stessi poliedri. Onde la proprietà che abbiamo dimostrata per il cilindro circoscritto è comune a un infinità d'altri corpi.

Si avrebbe potuto osservare ugualmente che le superfici dei poligoni circoscritti al circolo stanno fra loro come i loro contorni.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

Supponendosi che il segmento circolare BMD *faccia una rivoluzione intorno il diametro* AG *che sta fuori di questo segmento, trovare il valore del solido generato.* F. 273.

Abbassate sull' asse le perpendicolari BE, DF; conducete CI perpendicolare sulla corda BD; e tirate i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore BCA$=\frac{2}{3}p\overline{CA}^2.$ AE*; il solido descritto dal settore DCA$=\frac{2}{3}p.\overline{CA}^2.$ AF: dunque la differenza di questi due solidi, o il solido descritto dal settore DCB$=\frac{2}{3}p.\overline{CA}^2(AF-AE)=\frac{2}{3}p.\overline{CA}^2.EF.$ Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB ha per misu-

* P. 15.

*P. 13. ra $\frac{2}{3}p.\overline{CI}^2.EF$ *; dunque il solido descritto dal segmento $BMD=\frac{2}{3}p.EF(\overline{CA}^2-\overline{CI}^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si ha $\overline{CB}^2-\overline{CI}^2=\overline{BI}^2=\frac{1}{4}\overline{BD}^2$; dunque a motivo di CA=CB, il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura $\frac{2}{3}p.\ EF.\ \frac{1}{4}\overline{BD}^2$, o $\frac{p}{6}\overline{BD}^2.\ EF$.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

F. 273. *Ogni segmento di sfera compreso fra due piani paralleli ha per misura la mezza somma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera di cui questa medesima altezza è il diametro.*

Siano BE, DF i raggi delle basi del segmento, EF la sua altezza; talmente che il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno all' asse FE. Il

*P. 17. solido descritto dal segmento $BMD^*=\frac{p}{6}\overline{BD}^2.$ EF, il tronco di cono descritto dal trapezio

*P. 6. $BDFE^*=\frac{p}{3}EF.(\overline{BE}^2+\overline{DF}^2+BE.DF)$: dunque il segmento di sfera che è la somma di questi due solidi $=\frac{p}{6}EF.(2\overline{BE}^2+2\overline{DF}^2+2BE.DF+\overline{BD}^2)$. Ma tirando BO parallela ad EF, si avrà

*P. 9. L. III. $DO=DF-BE$, $\overline{DO}^2=\overline{DF}^2-2DF.BE+\overline{BE}^2$ * e per conseguenza $\overline{BD}^2=\overline{BO}^2+\overline{DO}^2=\overline{EF}^2+\overline{DF}^2-2DF\times BE+\overline{BE}^2$. Mettendo questo valore in vece di $\overline{BD}^2$ nell' espressione del segmento, e cancellando ciò che si distrugge, si avrà per la solidità del segmento,

$\frac{p}{6}EF.(3\overline{BE}^2+3\overline{DF}^2+\overline{EF}^2)$,

che si decompone in due parti; una $\frac{p}{6}$ EF. $(3\overline{BE}^2+3\overline{DF}^2)$, o EF.$\left(\frac{p.\overline{BE}^2+p.\overline{DF}^2}{2}\right)$ è la mezza-somma delle basi moltiplicata per l'altezza, l'altra $\frac{p}{6}.\overline{EF}^2$ rappresenta la sfera il di cui diametro è EF *. Dunque ogni segmento di sfera ec.

* P.15.

Corollario. Se una delle basi fosse nulla, il segmento di cui si tratta diventa un segmento sferico d'una sola base; dunque *ogni segmento sferico d'una sola base ha per valore la metà del cilindro della stessa base e della stessa altezza, più la sfera che ha per diametro quest' altezza medesima.*

Scolio generale.

Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza; la solidità del cilindro sarà $pR^2 \times H$ o pR^2H.

Sia R il raggio della base d'un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $pR^2 \times \frac{1}{3}H$, o $\frac{1}{3}pR^2H$.

Siano A e B i raggi delle basi d'un cono troncato, H la sua altezza: la solidità del tronco di cono sarà $\frac{p}{3}H(A^2+B^2+AB)$.

Sia R il raggio d'una sfera; la sua solidità sara $\frac{4}{3}pR^3$.

Sia R il raggio d'un settore sferico, H l'altezza della zona che gli serve di base; la solidità del settore sarà $\frac{2}{3}pR^2H$.

Siano P e Q le due basi d'un segmento sferico, H la sua altezza; la solidità di questo segmento sarà $\left(\frac{P+Q}{2}\right).H+\frac{1}{6}pH^3$.

Se il segmento sferico ha una sola base P, essendo l'altra nulla, la sua solidità sarà $\frac{1}{2}PH+\frac{1}{6}pH^3$.

Fine dell' Opera.

Fig. 1
6
7
14
15
19
25
30
31
90
92
100
106
112

113
119
120
121
126
127
132
133
130
144

148
149
150
154
155
160
161

165
166
143
140
146
174
177
A
B
C
D
E
F
G
O
M
a
b
c
d
e
f
g
m

178
182
185
188
192
184
193

N.° 8
198
202
203
210
211

212
220
221
222
224
225
226

231

232

236

234

244

245

246

49
273
265
266
256
272
264
263
255
257